

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

juni
2003/nr.8
jaargang 78

NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE
REKEN-WISKUNDEONDERWIJS
JAARVERGADERING/ STUDIEDAG

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

8

juni 2003 JAARGANG 78

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boelens en Jan Smit.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Stand van zaken Tweede fase

Eind maart uitte de Onderwijsraad in een ongevraagd advies (!) zijn bezorgdheid met betrekking tot de voorstellen voor de herinrichting van de Tweede fase. Een enkel citaat: 'De raad meent dat de voorgestelde aanpassingen van de natuurprofielen niet zullen leiden tot de gewenste vergroting van de belangstelling bij leerlingen voor de bètavakken en daarmee tot een grotere instroom in de bèta/techniek-vervolgopleidingen.' Zie *www.onderwijsraad.nl/Doc/advies_natuurprofielen.pdf*
Het ministerie lijkt echter nog steeds in grote lijnen aan die plannen te willen vasthouden. Wel wil men nu toch natuurkunde laten terugkeren in het profiel 'Natuur en Gezondheid', maar aan de forse ingrepen in met name de wiskundeprogramma's van de N-profielen valt blijkbaar niet te tornen. In de voorstellen van het ministerie is 'Natuur en Gezondheid' merkwaardig genoeg een sterker aangezet bètaprofiel geworden dan 'Natuur en Techniek': NG bevat immers vier bètaprofielvakken tegen NT drie (geen biologie), terwijl die drie vakken in beide profielen dezelfde of bijna dezelfde inhoud en omvang krijgen!
Op 22 mei vond overleg plaats tussen enerzijds vertegenwoordigers van de docenten exacte vakken (NVvW, NVON, Boze Bèta's) en anderzijds medewerkers van het departement. Het ministerie leek echter niet bereid serieus te praten over de aanleiding tot dit overleg: de alternatieve voorstellen van o.m. de samenwerkende vakverenigingen NVvW en NVON, gekaderd in een 20-stappenplan voor vergroting van de aantrekkelijkheid van bèta en techniek.
De NVvW besloot daarop het overleg met het departement op te schorten. In een brief aan minister Van der Hoeven heeft voorzitter Marian Kollenveld deze stap toegelicht, en daarbij nog eens verwezen naar voornoemde alternatieven.
De minister zal mogelijk nog vóór de zomervakantie haar voornemens met betrekking tot de Tweede fase naar de Tweede Kamer sturen. De Tweede Kamer zal zich daarover dan vanaf eind augustus kunnen buigen. Mocht u nog invloed willen uitoefenen op de uiteindelijke beslissing, dan valt te overwegen deze zomer contact op te nemen met kamerleden, bijvoorbeeld met leden van de vaste commissie voor onderwijs. Actuele ontwikkelingen zullen uiteraard gemeld worden op de website van de vereniging (*www.nvvw.nl*).

Inhoud van dit nummer

Heeft u al zicht op uw taken voor volgend jaar? Misschien krijgt u een brugklas? En misschien loopt u dan weer op tegen de vraag, aan welke rekenvaardigheden eigenlijk precies aandacht is besteed in het basisonderwijs? Hoe is de uitleg, de didactische aanpak daar eigenlijk geweest, en hoe kun je in de brugklas hierop aansluiten? In een interessant artikel verschaft Warner Bruins de nodige opheldering over aansluitingskwesties in het reken-wiskundeonderwijs, en krijgen we bij wijze van voorbeeld een kijkje in de keuken van het breukenonderwijs.
In een ander artikel laat Iris Gulikers zien hoe vwo-leerlingen geïntrigeerd raken door niet-Euclidische meetkunde. Met zelf-ontwikkeld lesmateriaal, binnenkort te publiceren als Zebraboekje, wist zij leerlingen aan het denken te zetten. Moeilijke stof, maar misschien juist daarom zo fascinerend?!
Daarnaast tal van andere bijdragen. Het artikel van Ton Konings loopt vooruit op onze kunstspecial van komend jaar, Harrie Broekman – sinds kort gepensioneerd, maar allesbehalve inactief - vertelt over zaken die hem inspireerden en nog steeds inspireren, Ruud Jongeling beschrijft een praktische geïntegreerde wiskundige activiteit voor het vmbo, Hans Klein meldt ons zijn ervaringen met computeralgebra in de klas, scholen wonnen prijzen in het kader van het WisKids-project en de Nederlandse Wiskunde Olympiade... Hopelijk biedt dit alles samen met onze vaste rubrieken enige inspiratie- en ontspanningslectuur voor de komende zomer.
De redactie wenst u een heerlijke vakantie!

GESCHIEDENIS VAN DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE INTRIGEERT LEERLINGEN

Leerling: ‘Als je voor het eerst hoort dat de drie hoeken van een driehoek samen géén 180° vormen, dan denk je, dat kán toch niet! Maar het kan wel.
Dit gaat in tegen alles wat je weet. En dat is moeilijk aan te nemen. Maar het is wel interessant.’

[Iris Gulikers]

Inleiding

De eerste systematische verhandeling over de meetkunde dateert van ongeveer 300 voor Christus. De Griekse wiskundige Euclides geeft in zijn Elementen een axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde op grond van 23 definities, 5 axioma’s en 5 postulaten. Daaruit worden de verdere stellingen streng logisch afgeleid. Euclides’ boek heeft eeuwenlang als model-leerboek gegolden voor de studie van de meetkunde.
Toch is de meetkunde meer dan 2000 jaar geleden in Griekenland niet afgerond. Het is eeuwenlang een actief onderzoeksgebied geweest, omdat er namelijk veel twijfel is geweest aan de opbouw van de Elementen. Vele wiskundigen dachten namelijk dat één van Euclides’ postulaten, het parallellenpostulaat, af te leiden is uit de eerste vier postulaten. Pas in de negentiende eeuw komen Lobačevskiĭ en Bolyai tot de ontdekking dat dit onmogelijk is. Zij bouwen vervolgens een meetkunde op waarbij ze de ontkenning van het parallellenpostulaat aannemen. Zo ontstaat de niet-Euclidische meetkunde.

De ontwikkeling van de meetkunde en het ontstaan van de niet-Euclidische meetkunde heb ik verwerkt in een Zebraboekje. Het boekje is geschreven voor vwo-leerlingen met wiskunde B12 in hun profiel die het subdomein ‘*Bewijzen in de vlakke meetkunde*’ hebben afgesloten. Het biedt gelegenheid om leerlingen hun bestaande meetkundekennis uit te laten breiden en kennis te laten nemen van de geschiedenis van een gebied binnen de wiskunde.

Belangrijke argumenten om geschiedenis van de wiskunde in de klas te gebruiken zijn[1]:
- Geschiedenis van de wiskunde presenteert de ontwikkeling van de wiskunde als menselijke bezigheid.
- Geschiedenis van de wiskunde wekt interesse en enthousiasme op bij leerlingen en docenten.
- Door middel van geschiedenis van de wiskunde kunnen leerlingen de wiskunde zelf beter begrijpen.
- Geschiedenis van de wiskunde biedt de mogelijkheid om wiskunde te onderwijzen in de lijn van de historische ontwikkeling.

In dit artikel geef ik een overzicht van de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde[2] en laat ik enkele opdrachten voor leerlingen zien.

De Elementen van Euclides

Euclides' postulaten[3] vormen de 'spelregels' van het redeneren binnen de meetkunde van de *Elementen* (zie figuur 1).
Het vijfde postulaat, ook wel parallellenpostulaat genoemd, luidt (in moderne bewoordingen) als volgt (zie figuur 2):
Als twee rechte lijnen m en l gesneden worden door een derde rechte lijn t, en de binnenhoeken a en b aan één kant van t zijn samen minder dan 180º, dan snijden m en l elkaar aan diezelfde kant van t.
Een bekende stelling uit de *Elementen* die equivalent is aan het parallellenpostulaat is propositie I.32:
In een driehoek is de buitenhoek gelijk aan de som van de niet aanliggende binnenhoeken en de hoeken van een driehoek zijn samen gelijk aan 180º.
In 1795 herformuleerde de Schot John Playfair het vijfde postulaat:
Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één rechte die evenwijdig is aan de lijn.
Hierbij maakte Playfair gebruik van Euclides' definitie van evenwijdige lijnen:
Evenwijdige lijnen zijn rechte lijnen die in hetzelfde vlak gelegen zijn en in beide richtingen tot in het oneindige verlengd elkaar in geen van beide richtingen ontmoeten.
Het voordeel van Playfairs formulering is dat het gemakkelijker is om de ontkenning hiervan te formuleren. Maar verder blijkt Playfairs postulaat equivalent te zijn aan Euclides' vijfde postulaat.

Het bewijs dat uit Playfairs postulaat Euclides' vijfde postulaat volgt, gaat als volgt:

Gegeven:
Drie lijnen *AB*, *CD* en *EF*, waarvoor geldt dat *AB* en *CD* met *EF* respectievelijk de hoeken *AEF* en *EFC* maken die samen kleiner zijn dan 180º.

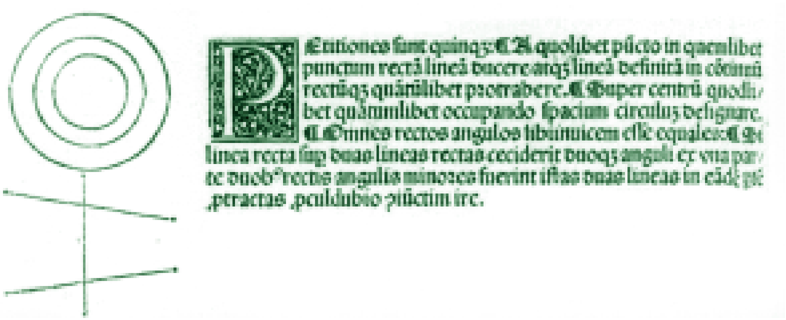
Te bewijzen:
Euclides' vijfde postulaat: *AB* en *CD* snijden elkaar in de richting van *A* en *C*.

Bewijs:
(Zie figuur 3) Trek door *E* een lijn *GH* die met *EF* hoek *GEF* maakt die gelijk is aan hoek *EFD*.
Dan is *GH* evenwijdig aan *CD* (*Z*-hoeken).

Het bewijs kan worden voltooid met behulp van de volgende stappen:
1. Toon aan dat de lijnen *AB* en *CD* elkaar moeten snijden.
2. Beredeneer aan welke kant de lijnen elkaar moeten snijden door gebruik te maken van het feit dat de lijnen een driehoek moeten vormen met *EF*.
3. Laat zien waarom Euclides' vijfde postulaat uiteindelijk is bewezen.

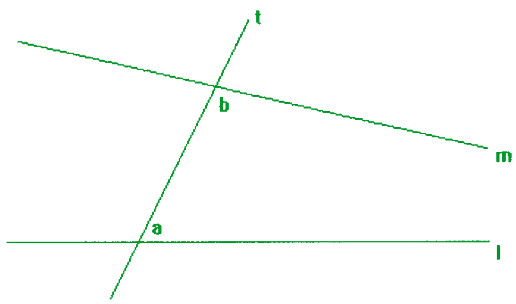
Opdracht:
Werk bovenstaande stappen van het bewijs uit en licht je uitwerking toe.

FIGUUR 1 De vijf postulaten van de *Elementen* uit de eerste gedrukte editie uit 1482

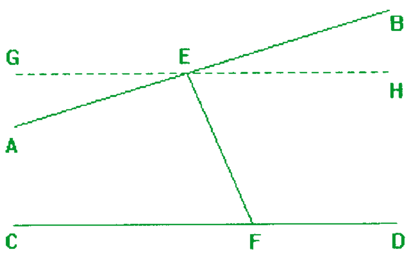

Petitiones sunt quinque. A quolibet pũcto in quemlibet punctum rectã lineã ducere. atque lineã definitã in cõtinuũ rectãque quãtãlibet protrahere. Super centrũ quodlibet quãtumlibet occupando spacium circulũ designare. Omnes rectos angulos sibiinvicem esse equales. Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoque anguli ex una parte duob' rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eãdẽ partẽ protractas procul dubio coniũctum iri.

Vertaling[4] figuur 1
- Laat geëist worden, van elk punt naar elk punt een rechte lijn te trekken.
- En een beëindigde rechte samenhangend in een rechte lijn te verlengen.
- En dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel beschreven wordt.
- En dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.
- En dat, wanneer een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte [hoeken] maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant, waar de hoeken zijn, die kleiner zijn dan twee rechte.

FIGUUR 2 Parallellenpostulaat



FIGUUR 3 Uit Playfairs postulaat volgt Euclides' vijfde postulaat



Het is opvallend dat Euclides zelf het parallellenpostulaat zo lang mogelijk niet gebruikt (tot propositie 29). Daardoor ontstond het vermoeden dat het vijfde postulaat overbodig is. Wiskundigen onderzochten of het parallellenpostulaat een uit de andere axioma's af te leiden stelling is of te vervangen is door een ander, eenvoudiger postulaat dat tot dezelfde meetkunde zou leiden.

'Bewijzen' van het parallellenpostulaat

Gedurende vele eeuwen bleven wiskundigen het parallellenpostulaat bestuderen, zo ook Girolamo Saccheri. Aangezien zijn voorgangers er niet in geslaagd zijn het vijfde postulaat uit de andere postulaten af te leiden, slaat de Italiaanse Saccheri een nieuwe weg in. In zijn in 1733 gepubliceerde werk *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* ('Euclides van elke blaam gezuiverd') maakt hij gebruik van een bewijs uit het ongerijmde. Saccheri neemt de eerste 28 proposities van Euclides aan, die zonder gebruikmaking van het parallellenpostulaat kunnen worden bewezen. Hij verwerpt vervolgens het vijfde postulaat en onderzoekt de gevolgtrekkingen die dan te maken zijn. Hij hoopt op onmogelijkheden te komen, omdat hij overtuigd is van de waarheid van het vijfde postulaat.

Saccheri bestudeert vierhoeken waarvan de basishoeken rechte hoeken zijn en de opstaande zijden aan elkaar gelijk zijn (zie figuur 4).
Het is zonder gebruikmaking van het parallellenpostulaat eenvoudig aan te tonen dat de tophoeken C en D aan elkaar gelijk zijn. Voor de hoeken bij C en D bestaan nu drie hypothesen:

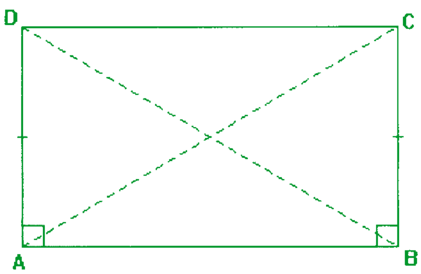
- hypothese 1: de hoeken bij C en D zijn rechte hoeken;
- hypothese 2: de hoeken bij C en D zijn stompe hoeken;
- hypothese 3: de hoeken bij C en D zijn scherpe hoeken.

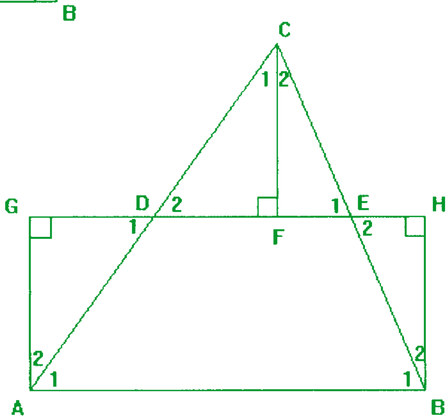
Saccheri neemt de hypothese van de stompe hoek en de hypothese van de scherpe hoek aan. Hij probeert te laten zien, dat dit samen met de eerste vier postulaten tot een tegenspraak leidt. Hieruit zou volgen dat de hypothese van de rechte hoek geldig is en hieruit is het vijfde postulaat af te leiden.
Helaas trekt Saccheri op het beslissende moment foute conclusies, bevooroordeeld door zijn Euclidische overtuiging en intuïtie. Hij verwerpt ten onrechte zijn resultaten als ongerijmd, waardoor hij van mening is dat hij het parallellenpostulaat heeft bewezen.

Opdracht:
Laat zien dat uit de hypothese van de rechte hoek het parallellenpostulaat is af te leiden. Je kunt dit doen door te laten zien dat de hoekensom in een driehoek gelijk is aan 180°, want hieruit volgt het parallellenpostulaat. Je mag alleen resultaten gebruiken die bewezen kunnen worden met de eerste vier postulaten.
Aanwijzing: Maak bij je bewijs gebruik van figuur 5.

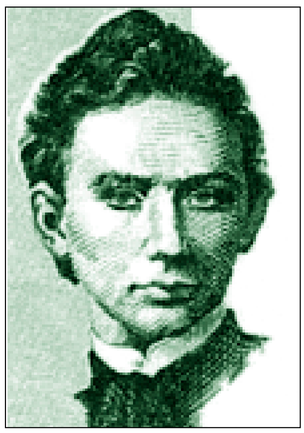
Gegeven:
Vierhoek $ABHG$ waarvan de tophoeken rechte hoeken zijn.
D is het midden van AC en E het midden van BC.

FIGUUR 4 Saccheri-vierhoek
FIGUUR 5 Uit de hypothese van de rechte hoek volgt dat de hoekensom in een driehoek gelijk is aan 180°





FIGUUR 6 János Bolyai (1802-1860)



F, *G* en *H* zijn de voetpunten van de loodlijnen vanuit *C*, *A* en *B* op de lijn *DE*.

Te bewijzen:
De hoekensom van driehoek *ABC* is gelijk aan 180°.

Het bewijs bestaat nu uit een aantal stappen:
1. Laat zien dat vierhoek *ABHG* een Saccheri-vierhoek is met basishoeken *G* en *H*. Toon eerst aan dat $\triangle ADG \cong \triangle CDF$ en $\triangle CEF \cong \triangle BEH$ en laat zien dat hieruit volgt dat $AG = BH$.
2. Laat zien dat de hoekensom *S* van driehoek *ABC* geschreven kan worden als $S = \angle A_{12} + \angle B_{12}$.
3. Leg uit hoe hieruit volgt dat de hoekensom van driehoek *ABC* gelijk is aan 180°.

Werk deze stappen uit.

Grondleggers van de niet-Euclidische meetkunde

In de negentiende eeuw krijgen twee onbekende wiskundigen plotseling veel ogen op zich gericht, de Rus Nicolai Lobačevskiĭ en de Hongaar János Bolyai (zie figuur 6 en figuur 7).
Zij slaan, onafhankelijk van elkaar, een nieuwe weg in. Ze onderzoeken of het mogelijk is om met behulp van de eerste vier postulaten en de ontkenning van het vijfde postulaat tot een andere, niet-Euclidische meetkunde te komen. Dit lukt inderdaad en zo komen zij tot de overtuiging dat het onmogelijk is, het parallellenpostulaat te bewijzen uit de eerste vier postulaten.

Er zijn twee varianten binnen de niet-Euclidische meetkunde. In het eerste geval, de hyperbolische meetkunde, wordt het vijfde postulaat vervangen door het volgende postulaat (zie figuur 8):
Er zijn meerdere evenwijdige lijnen aan een lijn l door een punt P dat niet op l ligt.
In de andere mogelijkheid, de elliptische meetkunde, is het parallellenpostulaat vervangen door:
Er zijn geen evenwijdige lijnen aan een lijn l door een punt P dat niet op l ligt.

Een model van de hyperbolische meetkunde: de Poincaré-schijf

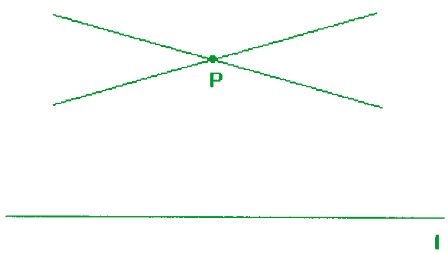
De Franse wiskundige Jules Henri Poincaré geeft in 1906 een model voor de hyperbolische meetkunde binnen een Euclidische cirkel γ (zie figuur 9). Binnen deze Poincaré-schijf gelden de volgende afspraken:
- *Punten* worden gerepresenteerd door punten.
- *Lijnen* worden gerepresenteerd door open cirkelbogen (zoals *m*) die de cirkel γ loodrecht snijden, of door open middellijnen (zoals *l*) van cirkel γ, waarbij je middellijnen kunt opvatten als een boog van een cirkel met oneindig grote straal.
- De *hoek* die twee lijnen die elkaar in een punt snijden met elkaar maken, is de hoek tussen de raaklijnen in dat punt.

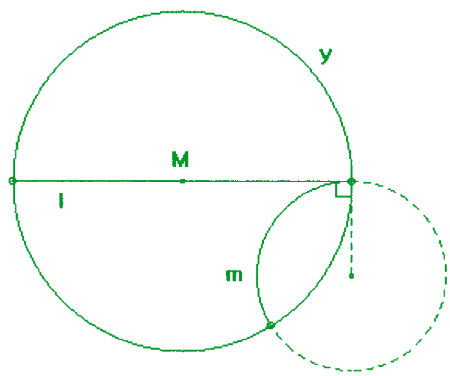
Met behulp van het computerprogramma Cabri[5] kunnen resultaten binnen de Poincaré-schijf worden onderzocht. Daarvoor kan het bestand *hyperbol.men* gedownload worden (vanaf *http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/intro.html*). Nu kan getoond worden dat binnen het model van Poincaré het hyperbolische postulaat geldig is (zie figuur 10):

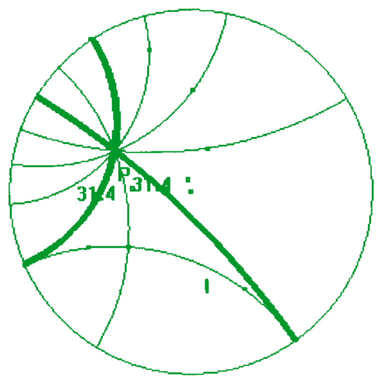
FIGUUR 7 Nicolai Lobačevskiĭ (1792-1856)
FIGUUR 8 Hyperbolisch postulaat

FIGUUR 9 Poincaré-schijf
FIGUUR 10 Hyperbolisch postulaat binnen Poincaré-schijf









Er zijn meerdere lijnen door een punt P buiten een lijn l die l niet snijden.
De niet-snijdende lijnen worden van de snijdende lijnen gescheiden door de zogenaamde ‘grens-parallellen’. De grensparallellen hebben elk een bepaalde ‘richting van evenwijdigheid’. De hoek die de lijn vanuit *P* loodrecht op *l* maakt met één van de parallellen wordt de ‘parallelhoek’ genoemd.

Opdracht:
1. Construeer een cirkel.
2. Construeer een lijn binnen de P-schijf en zet bij deze lijn de letter *l*.
3. Construeer een punt buiten lijn *l* en zet bij dit punt de letter *P*.
4. Construeer verschillende lijnen door *P* die lijn *l* niet snijden.
5. Construeer een lijn door *P* die lijn *l* alleen snijdt aan de rand van de cirkel. Maak deze lijn rood.
Aangezien de punten op de rand van de cirkel niet tot de P-schijf behoren (oneigenlijke punten), snijdt deze lijn *l* niet volgens de afspraken binnen dit model. Deze lijn wordt de grensparallel genoemd.
6. Er is nog een grensparallel. Construeer ook deze grensparallel en maak hem rood.
7. Wat kun je zeggen over de ligging van de lijnen die lijn *l* niet snijden?

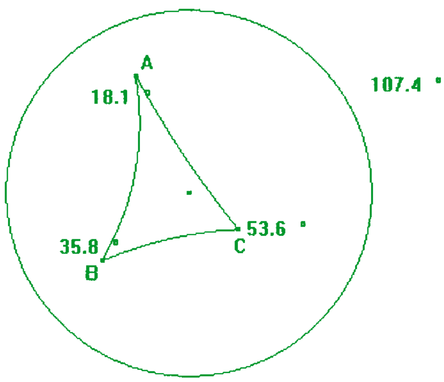
Nu in de hyperbolische meetkunde het vijfde postulaat niet meer geldig is, gaat de stelling dat de hoekensom in een driehoek *gelijk* is aan 180°, niet meer op. Deze stelling is namelijk equivalent aan het parallellen-postulaat. Met Cabri kan onderzocht worden dat binnen de hyperbolische meetkunde de som van de hoeken van een driehoek kleiner is dan 180° (zie figuur 11).

Ervaringen vanuit een klas

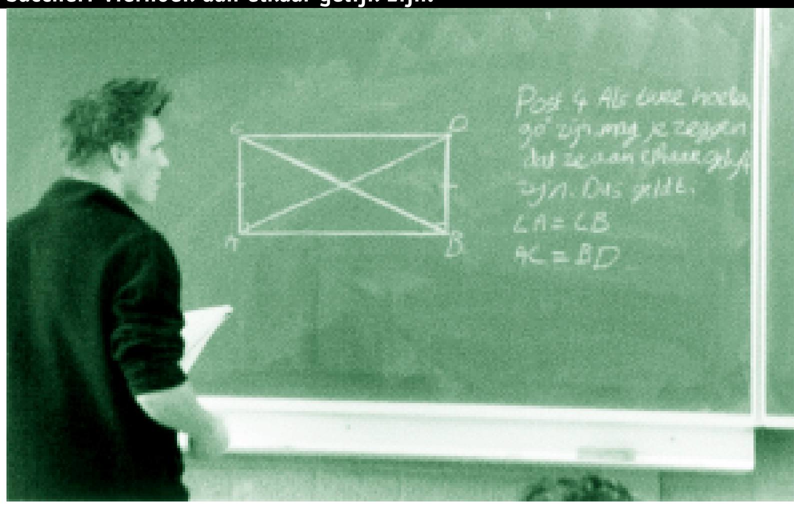
Terwijl ik dit artikel schrijf, gebruiken twee scholen het beschreven lesmateriaal in 5-vwo. Een 6-vwo klas van het Meridiaan College uit Amersfoort is in januari en februari gedurende 6 weken 2 lesuren per week met het Zebraboekje aan de slag geweest. Docente Klaske Blom laat door middel van levendige klassengesprekken de leerlingen kritisch naar de meetkunde laten kijken. De niet-Euclidische meetkunde zet voor de leerlingen de wereld op zijn kop. Plaatjes die ze in hun hoofd hebben over meetkunde, moeten ze overboord zetten en dat is moeilijk (zie figuur 12).
Blom vindt de niet-Euclidische meetkunde een prachtonderwerp voor haar leerlingen[6]: ‘Het is hoog gegrepen, ze snappen het nèt niet echt, merk ik. Je ziet ze dezelfde sprongen maken als er in de geschiedenis gemaakt zijn. Ze vinden het fascinerend. En dat is wat deze leerlingen nodig hebben.’

De leerlingen zelf reageren ook positief. Na afloop van de lessenserie hebben ze ieder hun eigen evaluatie geschreven. Enkele reacties zijn:
- ‘De stof was voor ons totaal onbekend gebied: de niet-Euclidische meetkunde, wat ik in het begin heel verwarrend en onbegrijpelijk vond. Het was totaal anders dan gewend. Maar door het zelf toe te passen met behulp van het programma Cabri werd het steeds duidelijker.’

FIGUUR 11 Hoekensom driehoek binnen Poincaré-schijf



FIGUUR 12 Een leerling begint voor het bord aan zijn klasgenoten uit te leggen waarom de tophoeken van een Saccheri-vierhoek aan elkaar gelijk zijn.



- ‘Het is leuk om te bewijzen. En ook om meer over de geschiedenis van de wiskunde te weten te komen. Doordat je meer van de achtergrond weet, gaat het allemaal meer leven. Je krijgt het gevoel alsof je in het leven van zo’n wiskundige stapt, doordat je zijn bewijzen na gaat doen en dus opnieuw gaat “bewijzen”.’
- ‘Toen we hiermee begonnen, was ik een beetje pessimistisch over het onderwerp. Dit omdat ik niet zo goed ben in meetkunde, en al helemaal niet in de niet-Euclidische meetkunde. Maar daar kwam al snel verandering in. Wat ik ook erg leuk vond, was het filosoferen over het feit dat er misschien wel een andere meetkunde kan bestaan. Dit leidde altijd tot leuke discussies.’

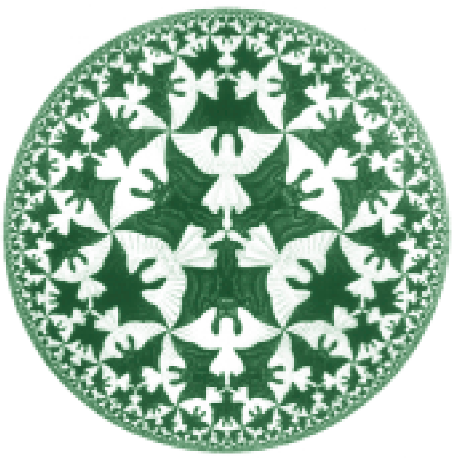
In het Zebraboekje staan ook onderzoeksopdrachten voor leerlingen, onder andere over de betekenis van de niet-Euclidische meetkunde in het werk van Escher (zie figuur 13).

Leerling: ‘Ik vind de tekeningen van Escher echt geweldig. Al van kleins af aan kan ik heel lang kijken naar een tekening van hem, proberen erachter te komen hoe hij het getekend had. Ik vind het dus erg leuk dat ik nu in ieder geval weet hoe zijn tekeningen in een cirkel passen, terwijl het lijkt alsof het oneindig doorgaat.’

Geïnteresseerd geraakt?

Het door mij ontwikkelde Zebraboekje is een onderdeel van een groter onderzoeksproject waaraan ik als AIO aan de Rijksuniversiteit van Groningen werk. De centrale vraag van het onderzoek is (in) hoe(verre) de geschiedenis van de meetkunde gebruikt kan worden, door leerling en leraar, bij het ‘opnieuw ontdekken’ van meetkundige kennis.

FIGUUR 13 M.C. Eschers ‘Cirkellimiet IV’, © 2003 Cordon Art - Baarn. Alle rechten voorbehouden.



Voor komend schooljaar ben ik nog op zoek naar docenten die dit Zebraboekje - ook te gebruiken als praktische opdracht - willen gebruiken in hun klas(sen). De volledige inhoud van het Zebraboekje is te vinden op mijn website (*http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm*).
Wie meer wil weten of overweegt om dit lesmateriaal in de les te gebruiken, kan contact met mij opnemen.

Noten

[1] Een systematisch literatuuronderzoek hierover is te lezen in:
I. Gulikers, K. Blom: ‘A Historical Angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education, Educational Studies of Mathematics 47(2) (2001), p. 223-258.
[2] Enkele interessante boeken over de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde zijn:
- J.E. Beth: Inleiding in de niet-Euclidische meetkunde op historischen grondslag (Groningen, 1929);
- R. Bonola: Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments (New York, 1955);
- F. Engel, P. Stäckel: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss (Teubner, 1895);
- M.J. Greenberg: Euclidean and non-Euclidean geometries, development and history (New York, 1993).
[3] Voor een volledig overzicht van Euclides’ axioma’s en definities zie:
- E.J. Dijksterhuis: De Elementen van Euclides (Groningen, 1929);
- T.L. Heath: The thirteen books of Euclid’s Elements (New York, 1956);
- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html
[4] Vertaling van E.J. Dijksterhuis uit De Elementen van Euclides (Groningen, 1929).
[5] Meer informatie over het programma Cabri is te vinden op www.pandd.demon.nl/cabri.htm.
Een demo van Cabri is te downloaden vanaf www.educadbv.nl/
[6] J. Kuijpers: Iets nèt niet snappen is fascinerend. Niet-Euclidische meetkunde intrigeert scholieren, NRC Handelsblad (Wetenschap en Onderwijs), 1 maart 2003.

Over de auteur

Iris Gulikers (e-mailadres: gulikgulikers@home.nl) is als AIO werkzaam aan de Rijksuniversiteit van Groningen, onder begeleiding van Henk Broer, Jan van Maanen en Anne van Streun. Daarnaast is zij wiskundedocente op de Van der Capellen Scholengemeenschap in Zwolle. Op haar website (http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm) is meer informatie met betrekking tot bovenstaand onderwerp te vinden.

MAAK ER GEEN PUNT VAN MAAR EEN KOMMA

Reken-wiskundeonderwijs van basisschool naar basisvorming

[Warner Bruins]

Hoe hoog is de drempel tussen groep 8 en de brugklas?



Hoe vaak komt het niet voor dat een wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs verzucht: 'Dat hebben jullie toch al op de basisschool geleerd?'
Kijken in elkaars keuken is een belangrijke voorwaarde om de kloof te overbruggen.

Probleemstelling

Hoe kunnen we een brug slaan tussen het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en dat in het voortgezet onderwijs?
Nog steeds staan leraren in het voortgezet onderwijs verbaasd te kijken naar 'wat ze in de brugklas allemaal niet kunnen', en dreigen kinderen tussen wal en schip te raken. 'Dat hebben jullie toch al op de basisschool geleerd? Moet ik daar nou nog een keer op terugkomen?' Zo'n leraar gaat er kennelijk van uit dat er achter het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool na acht jaar een punt gezet kan worden. Dat is klaar. Daar hoeft hij geen aandacht meer aan te besteden.
Het tegendeel blijkt het geval te zijn. Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool is er ook niet op gericht dat het na acht jaar af is. In de 'Proeve van het nationaal programma voor het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool'[1] schreef men al in 1990: 'Vroeger werd het rekenprogramma na de basisschool afgesloten. Tegenwoordig worden bepaalde onderwerpen voortgezet in het vervolgonderwijs.' In dit artikel wil ik daar nader op ingaan. Ik wil de overgangsproblematiek van basisschool naar basisvorming op het gebied van rekenen-wiskunde vanuit verschillende perspectieven belichten. Achtereenvolgens komen hier aan bod: de algemene doelstellingen, de kerndoelen en de leraar met zijn didactiek. Hoe wordt aan beide kanten van de 'kloof' tegen deze aspecten aangekeken?

De algemene doelstellingen

Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool laat zich als volgt karakteriseren[2]:

- In de loop van het primair onderwijs raken leerlingen geleidelijk aan vertrouwd met 'de wereld van de getallen' en ze ontdekken hoe ze bepaalde problemen uit het dagelijks leven 'rekenend' kunnen oplossen.
- Leerlingen verwerven inzicht in getallen, maten, structuren en de daarbij passende relaties en bewerkingen. Ze bouwen feitenkennis op, raken geroutineerd in het rekenen, kennen belangrijke referentiematen, sprekende voorbeelden en toepassingen.
- De onderwerpen die in de rekenles aan bod komen zijn afkomstig uit het leven van alledag, uit andere vormingsgebieden en uit de wiskunde zelf.
- De wiskundige activiteiten moeten uitdagend zijn. Ze moeten met plezier en voldoening, zelfstandig en in een groep uitgevoerd kunnen worden.
- Leerlingen leren problemen en oplossingen in wiskundetaal verwoorden en ze leren reflecteren op

elkaars oplossingen en denkwijzen. Het gezamenlijk zoeken naar oplossingen staat voorop.
- Leerlingen moeten alleen en samen met anderen hun denken kunnen ordenen en fouten kunnen opsporen of voorkomen.

Samenvattend: *Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool moet realiteitswaarde hebben (context) en de leerlingen moeten zich realiseren hoe problemen op verschillende manieren kunnen worden opgelost.*

Ook het wiskundeonderwijs in de basisvorming kan puntsgewijs gekarakteriseerd worden[3]. Tijdens de wiskundeles gaat het om:
- Het ontwikkelen van een wiskundige werkhouding.
- Het ontwikkelen van gevoel voor wiskundige denkwijzen (systematisch en analytisch leren denken).
- Het plezier beleven aan (gezamenlijke) wiskundige activiteiten waarbij de wiskunde gerelateerd wordt aan concrete verschijnselen.
- Het verwerven van wiskundetaal als communicatie-middel.
- Het verwerven van inzicht in de toepassing van wiskunde in andere vakken en met het oog op vervolgopleidingen en maatschappelijk functioneren.
- Het leren verzamelen en verwerken van kwantitatieve informatie.
- Het verder ontwikkelen en leren toepassen van rekenvaardigheden.
- Constructivistisch wiskunde-onderwijs op basis van eigen persoonlijke opdrachten en ervaringen.

Vergelijken we de twee karakteriseringen met elkaar, dan zien we veel overeenkomsten waarvan het realistische karakter het meest in het oog springt.

De domeinen

In het reken-wiskundeonderwijs van de basisschool gaat het om drie domeinen:
- *Gecijferdheid*: oriënteren in de wereld van getallen, op praktische wijze omgaan met getallen, op de juiste wijze concrete situaties omzetten in getallen en de bijbehorende bewerkingen kunnen uitvoeren, concrete situaties kunnen bedenken bij getallen en bewerkingen, gebruik maken van informele en gestandaardiseerde strategieën en notaties.
- *Bewerkingen*: hoofdrekenen, cijferen volgens min of meer verkorte standaardprocedures, informeel en formeel voorstelbare bewerkingen met breuken, kommagetallen en procenten uitvoeren, schattend rekenen, rekenen met de rekenmachine.
- *Meten en meetkunde*: frequent voorkomende meetkundige berekeningen (als lengte, oppervlakte en inhoud van veel gebruikte meetkundige figuren) uitvoeren, meetproblemen oplossen met behulp van passende maatsoorten, klokkijken en tijdsintervallen berekenen, rekenen met geld, tabellen en grafieken begrijpen en toepassen.

In het voortgezet onderwijs gaat het om:
A. Rekenen/meten/schatten
B. Algebraïsche verbanden
C. Meetkunde
D. Informatieverwerking en statistiek.
De doorgaande lijn van basisschool naar voortgezet onderwijs is met name terug te vinden in de domeinen A en C.

A. Rekenen/meten/schatten:
- Rekenproblemen oplossen met behulp van hoofd-rekenen, de zakrekenmachine, handig rekenen of cijferen.
- Adequaat gebruik maken van de zakrekenmachine.
- De uitkomst van een berekening en meting schatten, met gebruikmaking van referentiematen.
- Werken met gangbare maten en hiermee bewerkingen uitvoeren.
- Rekenen met verhouding en schaal.
- In betekenisvolle situaties omgaan met negatieve getallen.
- Het begrijpen van het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale getallen; met gebruikmaking van rekenkundige modellen eenvoudige berekeningen uitvoeren.
C. Meetkunde:
- Vlakke afbeeldingen van ruimtelijke situaties kunnen interpreteren, beschrijven, ruimtelijk voorstellen, op schaal weergeven, concreet handelen.
- Hoeken schatten, meten en berekenen;
- Gebruik kunnen maken van de begrippen evenwijdig, loodrecht en richting;
- Gebruik maken van regelmaat in en eigenschappen van meetkundige patronen en objecten;
- Gebruik maken van instrumenten bij het tekenen, berekenen, concreet handelen en redeneren.

Wie bovendien de reken-wiskundemethoden voor de basisschool en de wiskundemethoden voor de basis-vorming met elkaar vergelijkt, ontdekt dat de meeste onderwerpen uit bovengenoemde domeinen aan beide kanten voorkomen. Natuurlijk worden er in de verschillende methoden accentverschillen aangetroffen, maar van een inhoudelijk doorgaande lijn is wel degelijk sprake.

De leraar met zijn didactiek

Als we de algemene doelen en de domeinen van basis- en voortgezet onderwijs op het gebied van rekenen-wiskunde met elkaar vergelijken, blijkt dat er inhoudelijk geen echte kloof bestaat tussen de basis-school en de basisvorming. Toch wordt die kloof soms wel zo ervaren. Op zoek naar de oorzaak daarvan onderzocht ik de verwachtingen van leraren in het voortgezet onderwijs ten aanzien van het reken-onderwijs op de basisschool.
Op een recente studiedag voor wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs, waar de overgang van basis-school naar basisvorming centraal stond, werd de volgende vraag aan de leraren voorgelegd: 'Wat moeten leerlingen die van de basisschool komen beheersen als het gaat om rekenen-wiskunde?' De volgende onderdelen werden genoemd:

- Basisvaardigheden: Ze moeten de tafels kennen en de volgorde waarin de bewerkingen worden uitgevoerd. Handige rekenstrategieën moeten geautomatiseerd zijn. Ze moeten mooie ronde getallen kunnen vinden, kunnen verdubbelen, halveren en grote getallen uitspreken.
- Cijferen: Ze moeten staartdelingen en redactiesommen kunnen maken.
- Procenten en verhoudingen: Ze moeten met procenten kunnen rekenen, de 1%-regel kennen en met verhoudingstabellen kunnen omgaan.
- Breuken: Ze moeten breuken kunnen vereenvoudigen en ermee kunnen rekenen. Ze moeten regels kennen als 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' en 'teller keer teller - noemer keer noemer'. Ze moeten een gemengde breuk kunnen omzetten naar een decimaal getal.
- Meetkunde/meten: Ze moeten omtrek, oppervlakte en inhoud kunnen berekenen, vormen kunnen herkennen en benoemen, referentiematen bezitten en met schaal kunnen omgaan. Ze moeten kunnen rekenen in het metriek stelsel en om kunnen gaan met verschillende meetinstrumenten.

Deze lijst is de opbrengst van een brainstorm waar de deelnemers zich niet op hadden kunnen voorbereiden. De opsomming is dus niet volledig, maar geeft wel weer wat als eerste te binnen schiet. Bij doorvragen bleek dat met name op het gebied van breuken, inzicht in bewerkingen en het metriek stelsel men meer verwachtte van de basisschoolleerlingen dan wat ze in werkelijkheid vaak bleken te beheersen. De verwachtingen kwamen lang niet altijd uit. Overigens hadden de wiskundeleraren van havo en vwo hogere verwachtingen dan die van het vmbo.
Uit de studiedag kwam naar voren dat veel leraren in het voortgezet onderwijs een achterhaald beeld hebben van de inhoud en didactiek van de rekenles op de basisschool. Hun beeld was in veel gevallen gebaseerd op de eigen basisschooltijd, maar dat is lang geleden. Sinds die tijd is er veel veranderd.
Zo werd destijds bijvoorbeeld het vermenigvuldigen en delen van breuken en het werken met het metriek stelsel op een abstract en formeel niveau aangeleerd. Tegenwoordig spelen contexten, schema's en modellen een zeer grote rol in de basisschooldidactiek. Zij slaan een brug tussen het concrete handelen en het abstracte werken met getallen. Door het schematische tussenniveau blijven leerlingen zich realiseren wat de abstracte handelingen betekenen. Dit doorlopen van achtereenvolgens een concreet, een schematisch en een abstract niveau wordt in de didactiek 'progressief schematiseren' genoemd.
In het voortgezet onderwijs worden de eerste twee niveaus vaak overgeslagen en wordt de leerlingen vaak al snel gevraagd op een abstract en formeel niveau te rekenen, terwijl ze dat niet gewend zijn. Met andere woorden, ze begrijpen de opgaven wel, maar niet de manier en het niveau waarop de oplossingen gevraagd worden.

Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool is gebaseerd op realisme en zich realiseren.

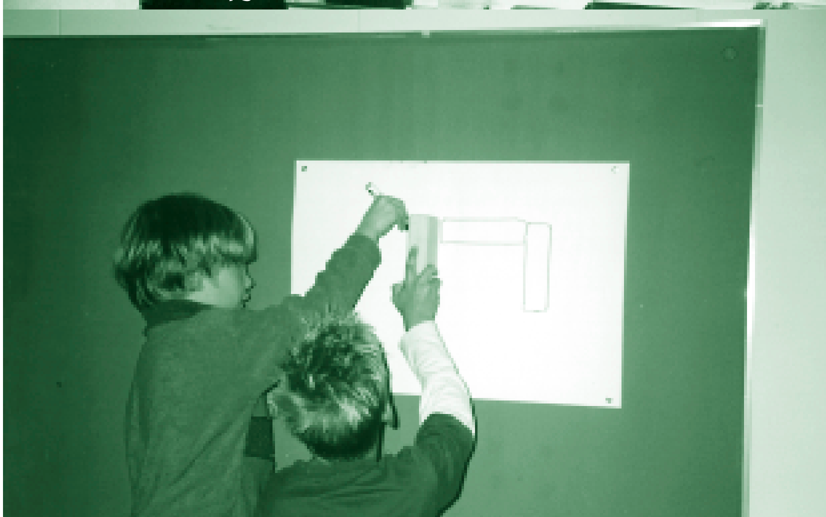




Leraren in de basisvorming verwachten veel van leerlingen uit groep 8.



Tegenwoordig worden veel vraagstukken in groep 8 op schematisch niveau met behulp van een denkmodel opgelost.



Het gaat steeds om de doorgaande lijn van concreet via schematisch naar abstract niveau.

Naast dit didactische probleem is er ook nog de misvatting, ingegeven door tijdgebrek, dat kennis blijvend is, terwijl regelmatig herhalen (van basisbewerkingen) noodzakelijk is. Door het overvolle programma in de basisvorming schiet die herhaling er nog wel eens bij in, terwijl de lesmethoden dat wel aangeven in de rekenhoofdstukken.

Het perspectief

Hoe ontstaat een doorgaande lijn in het het reken-wiskunde onderwijs? Hoe kunnen we na groep 8 geen punt zetten, maar een komma? Mijns inziens ligt de oplossing in een realistische manier van lesgeven waarin realiseren centraal staat en waarin men uitgaat van de realiteit.
Op negen van de tien basisscholen wordt een realistische methode gebruikt en in veel methoden voor het voortgezet onderwijs zijn realistische kenmerken terug te vinden. Inhoudelijk kunnen we dus concluderen dat realistisch rekenen zowel in de basisschool als in het voortgezet onderwijs mogelijk is.

moeten we vasthouden om de overgang van basisschool naar basisvorming te stroomlijnen. Pendelen tussen het schematische niveau en het abstract-formele niveau zal zowel in de rekenlessen op de basisschool als in de wiskundelessen in de basisvorming regel moeten zijn en geen uitzondering. De gebruikte modellen uit de betreffende leerlijnen en de betreffende leerlijnen zelf moeten over en weer bekend zijn.

Een voorbeeld uit het breukenonderwijs

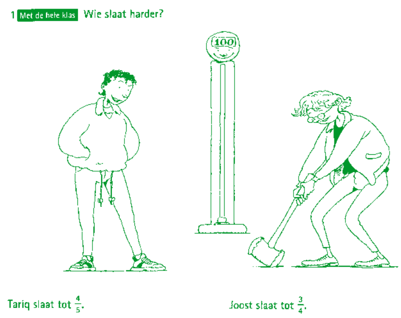
Hoe komen de drie niveaus van handelen die kenmerkend zijn voor het realistisch reken-wiskundeonderwijs, in de praktijk van de basisschool aan de orde? Ter illustratie volgen hierna wat voorbeelden uit de leerlijn van het vermenigvuldigen van breuken. Een gedetailleerde beschrijving van de volledige breukenleerlijn is te vinden in 'De Breukenbode'[4], bestaande uit een leerlingenboek en een docentenhandleiding te gebruiken voor het breukenonderwijs.



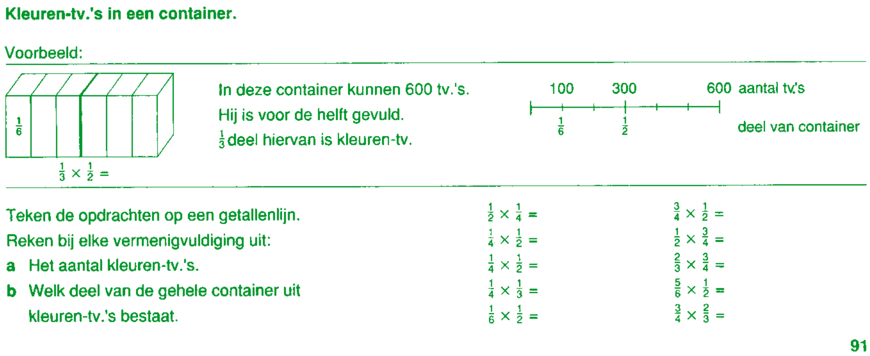
FIGUUR 1 Vermenigvuldigen van breuken op het informele, contextgebonden niveau van handelen. Uit: *Pluspunt*, lesboek groep 6, blz. 78.

Dat er desondanks toch een kloof ervaren wordt, mag niet alleen de leraren in het voortgezet onderwijs in de schoenen geschoven worden. Zij gaan weliswaar misschien te snel uit van formele oplossingsmethoden en een abstract niveau, waarbij ze niet teruggrijpen op de schema's en modellen die eraan vooraf gaan, maar op de basisschool komt het voor dat leraren juist blijven hangen bij die schema's en modellen. Veel leraren laten deze te lang gebruiken, ook door leerlingen die aan een hoger niveau toe zijn. Het gevolg is dat deze leerlingen te weinig oefening op het 'abstract/formele niveau' krijgen, waardoor het automatiseren niet voldoende aan bod komt. Sommige leraren worden zich dat op de valreep bewust en gaan dan plotseling aan het eind van groep 8 regeltjes op abstract niveau instuderen, die echter niet geworteld zijn in concrete en schematische voorstellingen.
Het basisprincipe van het realistisch reken-wiskunde-onderwijs bestaat uit leerlijnen die vloeiend de niveaus van concreet, schematisch en abstract doorlopen. Voor elk onderwerp opnieuw, voor elke leerling in een passend tempo. Dat uitgangspunt

1. Het informele, contextgebonden niveau van handelen.
In het voorbeeld uit figuur 1 gaat het om het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal. Het vraagstuk wordt op concreet, voorstelbaar niveau aangeboden. De leerlingen kunnen het met informele telstrategieën oplossen.
2. Het semi-formele, modelondersteunde niveau van handelen.
In het voorbeeld uit figuur 2 gaat het ook om het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal, maar dit vraagstuk is niet meer tellend op te lossen. De leerlingen kunnen in deze context de Kop van Jut als een denkmodel gebruiken, door bijvoorbeeld halverwege $\frac{1}{2}$ te noteren met het bijbehorende puntenaantal. Zo wordt het gebruik van de dubbele getallenlijn voorbereid.
3. Het formele, vakmatige niveau van handelen.
Figuur 3 laat een voorbeeld zien van het vermenigvuldigen van breuken op het formele niveau van handelen. De officiële somnotatie wordt gebruikt, er is nog wat steun van denkmodellen zoals de



FIGUUR 2 Vermenigvuldigen van breuken op het semi-formele, modelondersteunde niveau van handelen. De kop van Jut bereidt de getallenlijn voor. Uit: *De Breukenbode* deel 1, les 13, blad 2.


Kleuren-tv.'s in een container.

Voorbeeld:

In deze container kunnen 600 tv.'s.
Hij is voor de helft gevuld.
$\frac{1}{3}$ deel hiervan is kleuren-tv.

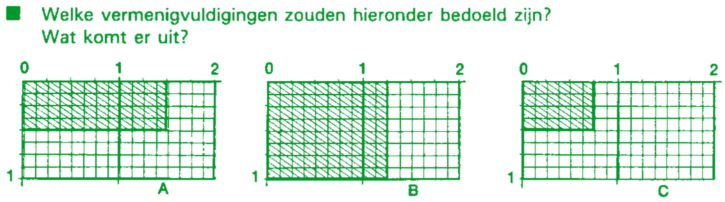
Teken de opdrachten op een getallenlijn.
Reken bij elke vermenigvuldiging uit:
a Het aantal kleuren-tv.'s.
b Welk deel van de gehele container uit kleuren-tv.'s bestaat.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$ $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$
$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} =$
$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} =$ $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} =$

91

FIGUUR 3 Breuken vermenigvuldigen op een formeel niveau. Uit: *Pluspunt*, lesboek groep 8, blz. 91.

FIGUUR 4 Van modelondersteund naar abstract. Welke vermenigvuldigingen zijn hier voorgesteld?



getallenlijn, maar leerlingen worden gestimuleerd om daar formeel mee te rekenen.
Op den duur moeten leerlingen in staat zijn om de stap van het schematische niveau naar het abstracte niveau te zetten. Ze moeten in het schema de 'kale som' kunnen herkennen. Omgekeerd moeten zij bij een 'kale som' indien dat nodig is, zelf het initiatief kunnen nemen om een geschikt denkmodel als ondersteuning te kiezen (zie figuur 4).

Conclusie

De conclusie uit het voorgaande zou kunnen zijn dat de opgestelde algemene en kerndoelen voor reken-wiskundeonderwijs in een doorgaande lijn zijn vastgesteld en verwerkt in lesmethoden. De 'kloof' tussen basisonderwijs en basisvorming zit meer in de gebruikte didactiek van de leerkrachten. Zowel in de didactiek van het reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs moet meer aandacht gegeven worden aan het schematische niveau van handelen met behulp van modellen en schema's als brugfunctie tussen het abstracte en het concrete niveau van handelen.
Op de basisschool zou men meer en frequenter moeten pendelen vanaf het schematische niveau van handelen naar het abstracte niveau van handelen.
In de basisvorming zou men meer gebruik moeten maken van de modellen en schema's die in de leerlijnen van de basisschool gebruikt worden.
Bovendien zou het wenselijk zijn als men in het voortgezet onderwijs meer bekend zou zijn met de leerlijnen en didactiek uit de basisschool. Terwijl, omgekeerd, het voor leraren in het basisonderwijs goed zou zijn als men duidelijker weet wat er van hun pupillen in de toekomst verwacht gaat worden.
Mijn advies voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool luidt: 'Maak er geen punt van maar een komma'.

Noten

[1] A. Treffers, L. Streefland, E. de Moor: Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskunde onderwijs op de basisschool, deel 1 (Zwijsen, Tilburg, 1994).
[2] Kerndoelen rekenen wiskunde basisonderwijs (www.minocw.nl/kerndoelen).
[3] Kerndoelen basisvorming voortgezet onderwijs (www.minocw.nl/basisvorming/kerndoelen).
[4] J. Bokhove, K. Buys, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom, A. Treffers: De Breukenbode (SLO, Enschede/FI, Utrecht, 1996).

Foto's

Jasper Oostlander

Over de auteur

Warner Bruins (e-mailadres: wbruins@che.nl) is werkzaam op de Christelijke Hogeschool Ede als docent rekenen/wiskunde.

Van de redactie

Dit artikel is met toestemming overgenomen uit jaargang 22, nummer 5 (2002/2003) van Willem Bartjens, tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs in de basisschool.
Willem Bartjens wordt uitgegeven door de NVORWO, de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (zie ook www.nvorwo.nl).

1355.[1]) Van de stijgende rij van 21 getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{21}$ vormen de termen $t_1, t_2, \ldots, t_{11}$ een rekenkundige rij met verschil 12 en de termen $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{21}$ een rekenkundige rij met verschil 6; $t_1 = 50$; $t_1 + t_2 + \ldots + t_{21} = s$.

Van een tweede rij $T_1, T_2, \ldots, T_{21}$ vormen de termen $T_1, T_2, \ldots, T_{16}$ een rekenkundige rij met verschil v en de termen $T_{16}, T_{17}, \ldots, T_{21}$ een rekenkundige rij met verschil w; $T_1 + T_2 + \ldots + T_{21} = S$; $T_1 = t_1$, $T_{21} = t_{21}$, $S = s$.

a. Bereken t_{21} en s.
b. Bereken v en w.
c. Bereken de waarden van n, waarvoor $T_n = t_n$ is.

1359. **a.** De deellijn van de hoek C snijdt de omgeschreven cirkel (M, R) van de driehoek ABC behalve in C nog in D; E is de projectie van D op AC. Bewijs: CE $= {}^1/_2(a + b)$.
b. Als de hoek C in grootte en ligging en de som $a + b$ in grootte gegeven zijn, bepaal dan de verzameling van M.

1360. Gegeven zijn de elkaar snijdende cirkels M en N en de lijn l, die met de cirkel M geen punt gemeen heeft. Construeer de cirkel X, die met de cirkel M de lijn l tot machtlijn heeft en de cirkel N raakt.

1361. Het voorvlak ABFE van de kubus ABCD—EFGH is evenwijdig aan het vlak van tekening. Het snijpunt M van AF en BE is de top en de omgeschreven cirkel γ van $\triangle$ CDG is richtkromme van het kegelvlak K.
Construeer in de projectiefiguur de raaklijn van K, die door het midden P van BC gaat en het lijnstuk AH snijdt.

1362. De omgeschreven bol van de regelmatige piramide T—ABCD is concentrisch met de bol, die de mantelribben en het grondvlak raakt. Druk de straal van de ingeschreven bol uit in de grondvlaksribbe a.

1363. P is het midden van de ribbe CD van het viervlak ABCD; de hoogtelijn PQ van $\triangle$ PAB staat loodrecht op CD. Bewijs, dat de hoogtelijnen van het viervlak uit C en D gelijk zijn.

1) Vraagstukken 1355-1366 zijn van het schriftelijk herexamen wiskunde l.o.-1962, dat op 9 en 10 januari 1963 werd gehouden.

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 50 (1962-1963)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).


FIGUUR 1 Het Ding

VERWONDERING EN VERBEELDING

Kunst kan in de wiskundeles een rol spelen: enerzijds bij klassikale '10-minuten-activiteiten' om de belangstelling van leerlingen te wekken, anderzijds bij opdrachten waarbij de leerling het geleerde verbeeldt in iets voor aan de muur of in de vitrine. Het doel is meer dan 'opleuken'.

[Ton Konings]



FIGUUR 2 Openingspagina website van Ars et Mathesis



FIGUUR 3 Salvador Dalí: Zwanen en Olifanten



FIGUUR 4 Salvador Dalí: Vliegende reusachtige mokkakop met een onverklaarbaar aanhangsel van vijf meter lang



FIGUUR 5 Salvador Dalí: De verzoeking van Antonius

Startpunt

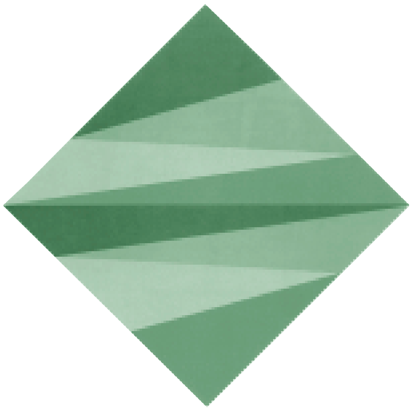
Tijdens mijn studie Toegepaste Wiskunde maakten medestudenten werktuigbouwkunde als protest tegen het kunstbeleid van wat nu de Technische Universiteit Twente heet, een kunstwerk zonder naam (zie figuur 1). Het werd veelal 'Het Ding' genoemd. In die tijd schreef Bruno Ernst het prachtige boek 'De toverspiegel van M.C. Escher' en had professor F. van der Blij een column 'Wiskunstig' in het Wiskobas-bulletin. Ik werd mede door hen gepakt door onderwerpen op het raakvlak van wiskunde en kunst. Uit die tijd stamt mijn liefde voor dingen die mooi, interessant, nutteloos en aanleiding tot wiskundige activiteiten zijn. Als leraar in het voortgezet onderwijs merkte ik dat ik deze hobby kon delen met leerlingen. Later op de lerarenopleiding kon ik mezelf samen met studenten nog meer daarin uitleven.
Inmiddels staat 'Het Ding' in diverse schoolboeken en heeft de door Ernst en Van der Blij opgerichte stichting Ars en Mathesis[1] een website (zie figuur 2). Deze site is evenals het wiskundelokaal van de Digitale School[2] een mooi startpunt voor een digitale wiskunstige speurtocht.

Verwondering wekken bij het instappen in leerstof

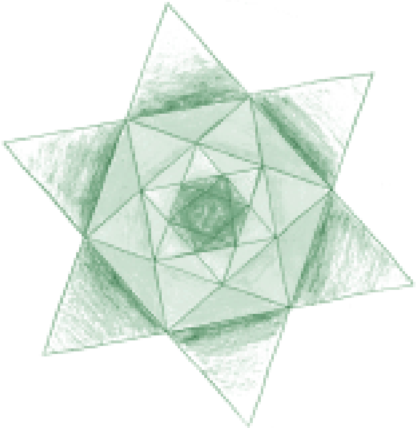
Wiskunde is voor ons, wiskundeleraren, een mooi vak. Zo ver zijn leerlingen nog niet. In het begin moeten we hun aandacht trekken.

Kunst is gemaakt om aandacht te vangen. Dat kan een docent gebruiken in de les. De aandacht ligt eerst breed, het gaat over een gevoel of emotie, pas later wordt het wiskunde. Een mens heeft volgens de theorie van Howard Gardner[6] meerdere intelligenties. Hoe meer je in staat bent leerlingen aan te spreken op hun hele intelligentiespectrum, des te groter is de kans dat je later meer vakinhoudelijk kunt inzoomen naar mathematisch/logische intelligentie. Het pleidooi is dus: laten we met iets moois beginnen, iets dat het gevoel aanspreekt.
Salvador Dali (zie figuur 3, 4 en 5) was een grootse aandachttrekker. Het absurde in zijn werk blijkt leerlingen aan te spreken. Zo'n plaat kun je aan de muur van het lokaal hangen, of vertonen via een kleurentransparant met de overheadprojector of – nog mooier – een beamer. Ook blijkt de procedure om de prent voor ieder zijn werk te laten doen van belang. Bijvoorbeeld:
- Kijk eens naar deze plaat, wat zie je, hoe zou het schilderij heten, waarom deze titel, wat doet het je, ...?
- Ik ga jullie daarover een wiskundige vraag stellen.
- Denk eerst individueel ... minuten na over die vraag.
- Wissel dan ... minuten uit met je buur; probeer het eens te worden.
- Daarna geef ik een paar leerlingen een beurt.

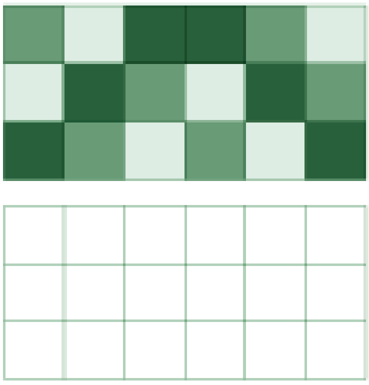
Figuur 3 zou een inleiding op spiegelen kunnen zijn (bekijk het schilderij ook eens op z'n kop; hoeveel



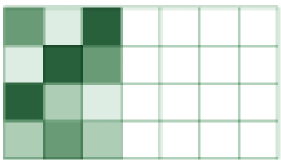
FIGUUR 6 Max Bill: Kleurvlakken met gelijke oppervlakte



FIGUUR 7



FIGUUR 8 Systematisch tellen en kleuren (met drie kleuren)



FIGUUR 9 Systematisch tellen en kleuren (met vier kleuren)

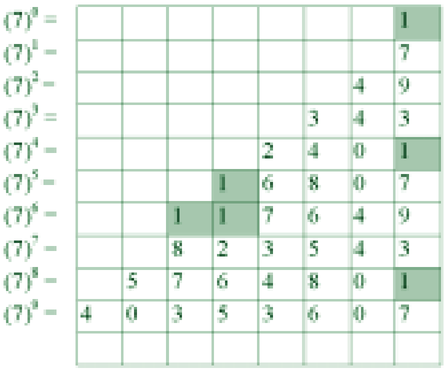
zwanen, hoeveel olifanten?), figuur 4 op getallenrijen en verhoudingen (wat zijn de onderlinge verhoudingen van vierkanten in het schilderij zodat het past?), en figuur 5 op wat er gebeurt met oppervlakte en inhoud als de lengte toeneemt (waarom hebben olifanten dikke poten en muggen niet?).

Max Bill is een kunstenaar met een wiskundige voorliefde. Figuur 6 kan een mooie opstap zijn tot het onderwerp 'oppervlakte van een driehoek', of aanleiding om die leerstof weer eens op te diepen (en ook hoe verdeelt de zig-zag-lijn de zijden van het vierkant?). Bill heeft vele soortgelijke kunstwerken.

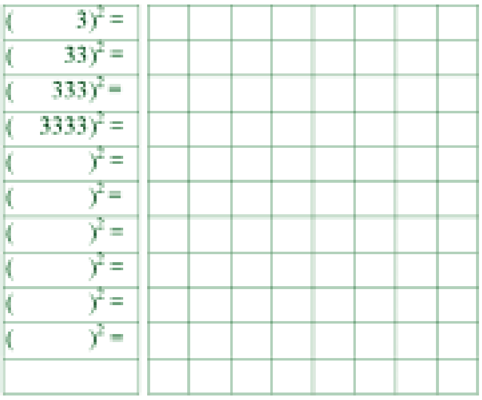
Leerlingen leven in een beeldcultuur. Beelden zijn sterker dan tekst en formules. Met goede voor-beelden leer je beter en met sterke na-beelden onthoud je beter. Soms kunnen dat beelden uit de kunst zijn.
Hoe kom je aan platen voor zulke '10-minuten-activiteiten'? Het zoekprogramma Google[3] maakt het binnenhalen van afbeeldingen gemakkelijk. Trefwoorden als 'concrete art', 'conceptual art', 'mathematics and art', maar ook namen van kunstenaars die u op bovenstaande sites bent tegengekomen, zorgen ervoor dat de plaatjes over uw beeldscherm rollen.
Het stellen van uitdagende vragen blijft een hele kunst.

Verbeelding bij het toepassen van leerstof

Waar vroeger handschrift, tekenen en schilderen belangrijke aspecten van wetenschapsbeoefening waren, kan men nu vaak volstaan met typen, plaatjes knippen en plakken uit tekenprogramma's en van internet. Voor leerlingen wordt de hoeveelheid tekenwerk sterk beperkt door werkbladen. Toch is af en toe zelf tekeningen maken en inkleuren van veel waarde.
'In het scheppend bezig zijn heeft de mens zijn ware vorming,' zei Ir. A.E. Bosman, de ontwerper van de Pythagorasboom, en zelf wiskundeleraar. 'Onderwijs lijkt te vaak een goed geleide autobustocht. Men kan niet verdwalen en de hele tocht is in het reisprogram beschreven. De chauffeur leidt de mensen zo veilig en zo snel mogelijk ergens naar haar doel. Uitstappen, dwalen, bloemen en stenen zoeken is hoofdzakelijk tijdverlies. Straks verdwalen ze nog. Instappen! En toch; het uitstappen is heerlijk. Dan veren we op. We gebruiken onze spieren, onze speurzin, oriëntatie-vermogen en eigen aanpak, leren we op eigen benen te staan, de eigen weg te vinden', zei hij zo beeldend[7].
Geef af en toe de leerlingen de gelegenheid iets van het geleerde om te zetten in een creatief product voor aan de muur of in de vitrine. Dit zorgt voor diepgaande en blijvende leerervaringen.
Natuurlijke stappen in een creatief proces zijn:
- je verwonderen over iets moois;



FIGUUR 10 Machten van 7 kleuren



FIGUUR 11 Kwadraten van 33

- wat zie je eigenlijk?
- bedenken hoe iets in elkaar zit;
- het namaken;
- een variant maken;
- eigen vondsten.

Dit geldt volgens mij vaak voor de kunstenaar, maar ook voor de wiskundige. Bij de figuren 7 t/m 11 kunnen opdrachten aan leerlingen de kunstenaar, maar ook de wiskundige, in ze wakker roepen.

Figuur 7 – Maak met behulp van een cirkelpatroon een patroon met driehoeken.

Figuur 8 – (Hoe) Kun je kolommen zo verplaatsen, dat aangenzende vakjes verschillende kleuren hebben (drie kleuren per kolom)?

Figuur 9 – Idem, maar nu vier kleuren per kolom.

Figuur 10 – Kleur elk cijfer met een andere kleur. Welk patroon? Verklaring?

Figuur 11 – Idem.

Passertekeningen (figuur 7) aan de muur van het lokaal kunnen ook later weer aanleiding zijn tot vele vragen: over aantallen, vergrotingsfactor, de omtrek van de cirkel, hoeken.

Figuur 8 en 9 zijn bedoeld voor permutaties, maar waarom lukt het kleuren van vakjes bij drie kleuren niet en bij vier kleuren wel? Heeft dat ook iets te maken met de vierkleuren-stelling voor het kleuren van landkaarten? Een docente die de figuren 10 en 11 aan haar LWOO-leerlingen voorlegde, meldde: ‘Nu vergeten ze de kwadraattoets en de toets voor machtsverheffen nooit meer’.

Nog meer?

Spreekt dit u aan? Zoek dan eens de Good-practice-afdeling van APS-wiskunde[4] op. Daar kunt u naast al deze plaatjes in kleur nog vele andere voorbeelden vinden en downloaden. De presentaties zijn ook voor niet-kenners van PowerPoint eenvoudig te bekijken, af te spelen en af te drukken tot wandplaten of werkbladen.
Wilt u dan nog meer? Inmiddels heb ik zeer succesvolle studiedagen over dit onderwerp mogen verzorgen. Dat zal ook weer in het cursusjaar 2003-2004 bij het aanbod van APS-wiskunde horen[5].

Noten

[1] www.arsetmathesis.nl
[2] www.digischool.nl/wiskunde
[3] www.google.com
[4] www.aps.nl/wiskunde/lesvoorbeelden
[5] www.aps.nl/wiskunde/nascholing
[6] H. Gardner: Soorten intelligentie - Meervoudige Intelligenties voor de 21e eeuw (Amsterdam, 2002).
[7] Ir. A.E. Bosman: Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde (Parcival, Breda, 1957).

Over de auteur

Ton Konings (e-mailadres: ton.konings@ils.han.nl) is werkzaam aan de 2e-graadslerarenopleiding van het Instituut voor Leraar en School te Nijmegen als vakdocent en vakdidacticus wiskunde. Ook is hij medewerker van APS-wiskunde te Utrecht.

Met dank aan Twan Brouwers, natuurkundecollega aan het ILS, voor het lenen van enig gedachtegoed.

TER INSPIRATIE: HARRIE BROEKMAN EN ZÌJN INSPIRATIEBRONNEN

[Klaske Blom]

Op 20 februari 2003 nam Harrie Broekman officieel afscheid van het IVLOS, het Interfacultair Instituut voor de Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden. Na bijna 36 jaar als vakdidacticus gewerkt te hebben aan dit instituut en de voorloper daarvan, het Pedagogisch Didactisch Instituut, eindigde zijn dienstverband ten gevolge van zijn pensionering. Ter gelegenheid van deze gebeurtenis ging Klaske Blom in gesprek met Harrie Broekman.
In de talloze artikelen die hij heeft gepubliceerd, loopt een rode draad van 'geïnspireerd zijn' en 'inspireren'. Tijdens het interview blikte Harrie terug op de inspiratiebronnen in zìjn leven en stond hij stil bij zijn motto: 'Het zijn de kleine dingen die het doen'.

Inspirerende leerlingen

45 jaar geleden, één van mijn eerste bijlesleerlingen kwam binnen en zei: 'Hier is het geld en van mij hoeft het niet hoor'. Ik antwoordde: 'Je bent net mijn zus, je kan 't niet en wilt 't niet ook'. Vervolgens heeft het meisje verteld wat er zo belachelijk was aan wiskunde. Ik luisterde alleen maar, bevestigde haar in haar ergernis en probeerde af en toe een vakmatige nuance aan te brengen. Na een uur heb ik voorgesteld dat ze het geld weer mee naar huis nam en met haar vader zou bespreken dat ze geen bijles wilde. Een onmogelijk voorstel omdat dit haar ernstige ruzie met haar vader zou opleveren. We sloten een compromis: ze zou nog één keer komen om waar te krijgen voor haar geld en daarna zouden we stoppen met de bijles. De volgende keer kwam ze binnen met een paar sommetjes die ze maar even uitgezocht had nu ze toch kwam, en ze vroeg: 'Kan jij zorgen dat ik met Pasen een voldoende voor wiskunde heb?' Ze bleef, Pasen bleek te snel, maar op haar zomerrapport prijkte een voldoende voor wiskunde.

Historie I: van student tot docent, begeleider en inspirator

Van leerlingen die niet willen, kun je veel leren als docent. Goed lesgeven impliceert dat je de onwil om wiskunde te leren erkent en herkent. Het is voor veel leerlingen geen vanzelfsprekendheid dat wiskunde leuk is, en daarin moet je ze bevestigen. Halsstarrig weigerende leerlingen helpen je als docent dit helder voor ogen te houden en je vak te relativeren.
Harrie Broekman vindt dat hij zijn hele leven geboft heeft met leuk werk waarvoor hij nooit heeft hoeven solliciteren. Als tweedejaars student wis- en natuurkunde, met scheikunde als bijvak, kwam hij de directeur van zijn oude HBS tegen die hem vertelde zich zorgen te maken over de doorstroom van leerlingen met mulo-B naar de 4e klas van de hbs. Ze moesten toelatingsexamen doen, maar zakten vaak in groten getale omdat ze te weinig bagage hadden. In overleg werd besloten dat Harrie één middag in de week bijles wis-, natuur- en scheikunde zou gaan geven aan een klasje van 10 à 15 leerlingen. Zo deed



hij in 1958 met veel plezier zijn eerste klassikale onderwijservaring op. Hij vond het onderwijs zo boeiend dat hij er veel tijd in stak en het zijn eigen studietempo vertraagde. Wat vooral zo leuk was aan het werken met leerlingen, was om de worsteling te zien waarmee ze de stof onder de knie probeerden te krijgen, en dan daarnaast zelf op zoek te zijn naar kleine dingen die bij dit proces behulpzaam konden zijn.
Na een tweede invalbaan op het Thorbecke was hij van plan zich weer helemaal aan zijn studie te wijden. Toch liet hij nogmaals een beroep op zich doen, ditmaal door conrector Bosboom van het Bonifatius College. Hij kon ook moeilijk weigeren, omdat Bosboom gezellig met zijn vader aan de sigaar met borrel zat toen hij hem vroeg. Na een jaar besloot hij hier niet te blijven werken, omdat het schoolsysteem hem niet voldoende inspireerde. Maar het onderwijs trok wel en Harrie deed een verzoek om een dag mee te mogen lopen op het huidige Jordan Lyceum, een school ingericht volgens het Montessori systeem. Hij raakte geboeid door dit onderwijssysteem en kreeg hier, geheel tegen zijn bedoeling in, onmiddellijk een baan aangeboden. Tijdens zijn eerste jaar bleek het grote nadeel van dit individuele systeem te zijn, dat elke leerling op zijn/haar eigen tijd een toets moest maken, en dat er dus ook voor elke leerling een andere toets beschikbaar moest zijn, een zeer tijdrovende klus. Bovendien kwamen vrijwel alle hulpvragen bij de docent terecht, omdat leerlingen niet in staat waren elkaar te ondersteunen - ze waren immers allemaal met hun eigen traject bezig. Harrie kon zich in dit individualistische systeem niet vinden en wilde weg. Nadat Freudenthal en Minnaert (die in het bestuur en curatorium van het Jordan zaten) er zeer sterk bij hem op aandrongen om te blijven en hem 10 taakuren boden, bleef hij nog een jaar en ontwikkelde in dit jaar een grote hoeveelheid extra proefwerken. Ook maakte hij een boekje met tips en standaardvragen en antwoorden dat leerlingen bij de methode konden gebruiken, zodat ze niet met elke vraag naar de docent hoefden; in 1966, 'zelfstandig werken' avant la lettre.
Na dit tweede jaar aan het Jordan kreeg Harrie een halve aanstelling als assistent bij Bunt in de didactiek. Toen deze naar Amerika vertrok, werd hij samen met Joop van Dormolen aangesteld als hoofdmedewerker aan het instituut voor didactiek. Zijn promotieonderzoek had hij halverwege afgebroken en samen met Van Dormolen werkte hij aan de ontwikkeling van de wiskundedidactiek. Daarnaast bleef hij regelmatig voor korte periodes als vervanger werkzaam in het onderwijs omdat hij hiervan erg genoot.

Inspirerende onderwijzers en leraren

Naast me in de klas op de lagere school zat een jongen die graag naar het seminarie wilde, maar net niet goed genoeg was. Ik was een goede leerling en daarom spiekte hij tijdens vele repetities bij mij; ik liet hem altijd stiekem meekijken. Op een gegeven moment riep de onderwijzer me apart en vroeg of het klopte dat ik mijn buurman graag hielp om goede cijfers te halen. Heel even voelde ik me betrapt, totdat ik in de gaten kreeg dat de onderwijzer het zeer vriendelijk bedoelde: voortaan mochten mijn buurman en ik regelmatig op de gang samen zitten werken, zodat ik hem echt kon helpen.
Toen ik de didactiekopleiding deed, had ik een stageplaats nodig en bezocht daarom mijn oude wiskundedocent. Deze man hield een dagboek bij. Daardoor werd hij zich weer bewust van zijn vaste gewoontes die zo moeilijk te veranderen zijn; alleen door reflectie en bewuste oefening dacht hij tot verandering te kunnen komen.

Historie II: van docent tot didacticus – spelletjes, curriculumcriteria en leerstijlen

Sommige mensen associëren Harrie onmiddellijk met 'spelletjes' en dat is niet voor niets. Harrie hecht een groot belang aan de waarde van puzzelen en spelen voor het leren van wiskunde. Het doen is niet alleen van belang voor de wiskundige inhoud. De vaardigheden die ermee geoefend worden, zijn minstens zo belangrijk: het aannemen van een onderzoekende houding en het wisselen van perspectief ten opzichte van een probleem gaan als vanzelf als je speelt. Door de uitdagingen van het spel en de andersoortige activiteiten krijgen mensen vaak lef om een andere invalshoek te kiezen en het probleem nog eens op een andere manier aan te pakken.

Tijdens zijn werk aan het PDI en het IVLOS heeft Harrie samen met Joop van Dormolen criteria ontwikkeld voor de keuze en voor de ordening van het wiskundig curriculum. Voorop stond dat de onderwijsdoelen de uiteindelijke leerstof moesten bepalen. En daar wringt op dit moment de schoen volgens Harrie: 'We hebben onze doelen niet duidelijk en daardoor zwalken we en schipperen we met het curriculum. Zou het bijvoorbeeld niet zinvol zijn om het brugklasprogramma zwaarder te maken op algebraïsch gebied? Kinderen in die leeftijd zitten in een bijzonder vruchtbare periode, je zou ze de kans moeten geven daar wat mee te doen. Ze kweken dan op die leeftijd een serieus werkende houding aan en daar kun je later de vruchten van plukken. En om nog een knuppel in het hoenderhok te gooien, zou je niet getaltheorie in plaats van meetkunde moeten aanbieden om te leren redeneren en bewijzen? Getaltheorie is toegankelijker dan meetkunde, en daardoor kan een leerling toe komen aan het ontwikkelen van een onderzoekende houding. Meetkunde heeft zeker veel boeiende en leerzame aspecten, maar waar haal je de inspiratie vandaan om iets te bewijzen wat je zo ook wel kunt zien? Omdat de leerstofkeuze afhankelijk is van de doelstellingen die we willen bereiken met ons onderwijs, moet dus alle energie erop gericht zijn om daarin overeenstemming te bereiken'.

Op het IVLOS kwam Harrie in contact met Miep Geensen, een psychologe die hem aanzette zich te verdiepen in leerstijlen. Na veel onderzoek hiernaar kwam hij tot het inzicht dat het voor elke leerling belangrijk is om in te zien welke leerstijl hij/zij heeft. In de eerste plaats moet je als docent een leerling erkennen in zijn eigen leerstijl en vervolgens die leerling zijn eigen leerstijl laten herkennen. Als een leerling in een bètarichting verder wil, moet hij een structureerder kunnen zijn; op andere momenten is het nodig om te convergeren, in plaats van in de breedte te blijven werken en voor sommige leerstof is training en volharding nodig. Wiskunde beoefenen vraagt verschillende leerstijlen en daarvan moet je leerlingen bewust maken. Dit impliceert dat je regelmatig met elkaar werkt aan hetzelfde onderwerp, klassikale leergesprekken houdt en de leerlingen zich, wat hun aanpak betreft, laat vergelijken met anderen. Hierdoor ontdekken ze welke voor- en nadelen hun leerstijl heeft en wat ze van anderen willen leren.

Harrie verzucht met groot ongenoegen dat op veel scholen de klassikale interactie verdwenen is, omdat de docent denkt dat het niet bij de 'werkwijze Tweede Fase' past. Daarmee is het onmogelijk leerlingen te begeleiden bij het ontwikkelen van hun eigen leerstijl omdat ze niet van elkaar leren en bovendien verdwijnt de inspirerende docent van het toneel. Volgens Harrie schuilt hierin een groot gevaar voor het onderwijs: 'Als we met ons middelbaar onderwijs nastreven om leerlingen als zelfstandig werkende en lerende jongeren af te leveren, is daarbij de enthousiasmerende rol van de docent essentieel om tijdens het proces leerlingen over drempels te helpen bij het onderzoekend bezig zijn'.

Inspirerende mensen

Ik had colleges van Van der Blij die af en toe liet merken al die regeltjes die hij ons leerde zo vreselijk te vinden. Hij zei dan: 'Jammer hè, dat al die dingen al ontdekt zijn, daarom moet je ook zoveel leren'. Voor mij was het een hart onder de riem, omdat ik altijd zoveel moeite gehad heb met het onthouden en uit mijn hoofd leren van dingen. Van der Blij was, net als Freudenthal trouwens, geweldig goed in het inspirerend uitdagen en tegelijk relativeren van zijn vak. Ik had eigenlijk kernfysica willen doen, maar door deze twee hoogleraren ben ik naar de wiskunde getrokken. Joop van Dormolen was een geweldig collega met wie ik 22 jaar heb samengewerkt. Zijn motto 'Doe wat je het liefste doet' is belangrijk voor me.

Wat ik graag doe is het bijwonen van de ATM (Association of Teachers of Mathematics) conferenties in Groot-Brittannië. Zo'n conferentie is vol gepland met workshops door docenten die iets uitgeprobeerd hebben in de klas en daar met elkaar over verder willen praten. Het idee, 'het is lekker om bezig te zijn, iets uit te proberen en erover na te denken', spreekt me zeer aan.

Historie III: de didacticus met pensioen – Project CD-bèta, Polen en het Rekenweb

En bij een terugblik hoort ook een vooruitblik, niet nadat Harrie nogmaals vaststelt, dat het in het onderwijs draait om inspirerende mensen en kleine behapbare uitdagingen. De laatste jaren heeft hij meegewerkt in mooie projecten als het BPS (Bètaprofielen in het studiehuis) en het LOBO-project van CD-bèta (Leerlijn onderzoekende houding in de bètavakken onderbouw). Dit laatste project loopt als het meezit nog een aantal jaren door, en daarmee Harrie ook! Verder houdt hij voorlopig werk als medeontwikkelaar van de spelhoek op het Rekenweb van het FI en blijft hij actief als didacticus in Polen.

Hij zou een voorbeeld kunnen zijn voor alle docenten die niet willen indutten, maar op zoek blijven naar stimulerende activiteiten en naar het plezier in hun vak!

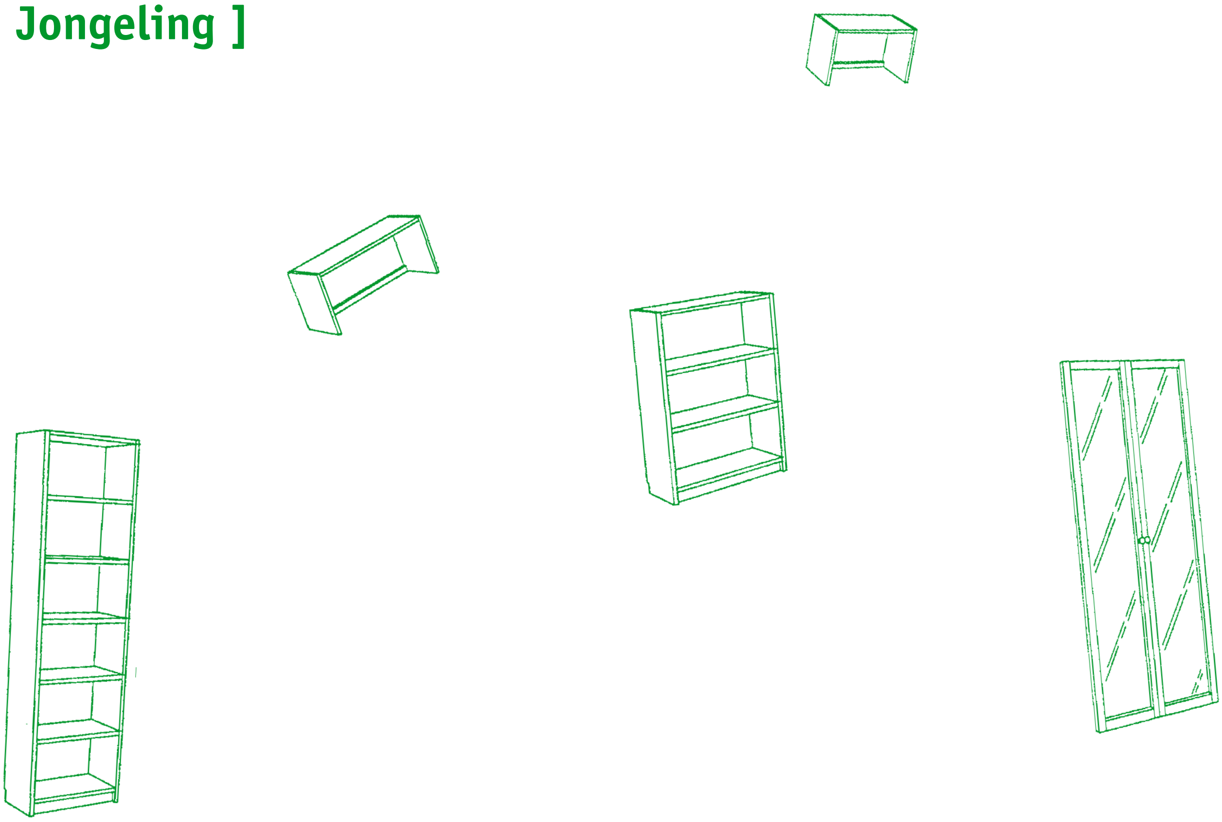
Over de auteur

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskundedocente op het Hooghe Landt in Amersfoort. Zij is tevens redacteur van Euclides.

WISKUNDE EN IKEA

Een GWA voor de onderbouw van het vmbo

[Ruud Jongeling]



Naar de winkel

Ruim een jaar geleden kreeg ik te horen dat we nodig weer eens naar IKEA moesten. In het verleden vroeg ik dan: ‘Hebben we iets nodig?’ Inmiddels weet ik beter: naar IKEA ga je niet omdat je wat nodig hebt, maar om te ontdekken dàt je wat nodig hebt. En zodoende slenterde ik op een zaterdag door IKEA in Sliedrecht.

Koophulp

De producten van IKEA moet je vaak zelf bij elkaar zoeken en in elkaar zetten. Om de klanten te helpen heeft IKEA zogenaamde ‘koophulpen’ gemaakt: een papier waarop de klant kan tekenen en rekenen. Zo hoort bij het *Billy* boekenkastensysteem een koophulp met een ruitjespatroon schaal 1:20. De klant kan hierop zijn ontwerp tekenen. Deze schaal is niet voor niets zo gekozen: veel artikelen uit de *Billy*-serie zijn een veelvoud van 20 cm hoog. Onder de tekening kan de klant noteren welke onderdelen voor het ontwerp nodig zijn en wat het gaat kosten.
Kijkend naar deze koophulp realiseerde ik me dat dit wiskunde voor de eerste klas van het vmbo is: aanzichten tekenen, op eenvoudige wijze op schaal werken en met decimale getallen rekenen. En juist voor dit leerjaar zochten we nog een GWA.
In de eerste klas hadden we al een GWA, ‘Het Weer’. De leerlingen verzamelen weerberichten en tekenen grafieken van de voorspelde temperaturen, de maximumtemperatuur en de minimumtemperatuur. Daarnaast zoeken ze gegevens op de site van het KNMI. Dit is een duidelijk gestructureerde GWA. De leerling wordt stap voor stap door zijn opdracht gestuurd.
Een belangrijk pluspunt van Billy’s koophulp was dat ze een GWA mogelijk maakt waarin de leerling veel meer zèlf structuur moet aanbrengen. In principe heeft hij voldoende aan de koophulp - met daarnaast een korte opdracht.

Effektiv en Laminaat

Nieuwsgierig geworden vervolgde ik mijn weg door IKEA. Omdat het tempo bij IKEA wordt bepaald door de traagste bejaarde in het gangpad op weg naar de kassa, had ik nogal wat tijd om rond te kijken. Er bleken meer koophulpen aanwezig, onder andere bij de keukens, de kantoorartikelen en het laminaat. Al deze koophulpen heb ik meegenomen. Thuis heb ik ze nog eens rustig bekeken. In principe waren ze allemaal geschikt voor een GWA. Uiteindelijk heb ik naast het *Billy* kastensysteem nog twee andere koophulpen gebruikt.
Voor de tweede klas heb ik er twee gemaakt:
- ‘*Effektiv*’, de leerling maakt van zijn slaapkamer een studeerkamer;
- ‘Laminaat’, de leerling legt laminaat op zijn slaapkamer.

Benodigdheden

Vocht beschermlaag	Dikte in mm	Aantal m^2 per pak	Prijs per m^2	Prijs per pak	Aantal	Totaalprijs
SPÄRRA vochtwerende folie	0.2	17	1.^{70}	29.-	1	29
Ondervloeren						
NIVÅ ondervloer	3	15	2.-	30.-	1	30
NIVÅ ondervloer	4	7	3.^{57}	25.-	2	50
NIVÅ ondervloer	9	7.5	7.^{86}	59.-	2	118

Diversen	Benodigdheden	Prijs per stuk	Aantal	Totaalprijs
TUNDRA laminaatlijm	1 fles per 10-12 m^2	8.^{95}	1	8.95
FIXA legset voor vloeren (haak en afstandblokjes)	1 set per 30 m^2	14.-	1	14
PLAN muurplint lengte 240 cm, div. kleuren	5 muurplint	13.-	5	65
PLAN verbindingsstrip 200 cm, div kleuren	verbindings	14.-	10	140
PLAN egalisatiestrip 200 cm, div kleuren	egalisaties	15.-	10	150
PLAN afsluitlijst 200 cm, div kleuren	afsluitlijst	14.-	5	70
PLAN parketlat lengte 240 cm, div. kleuren	[illegible]	6.^{50}	4	2600
PLAN L-lijst 100 cm messing	L lijst	11.-	11	121
PLAN afsluitstrip l. 100 cm, schuinte 0.3 cm messing	afsluitstrip	11.-	11	121
PLAN afsluitstrip l. 100 cm, schuinte 0.8 cm messing	afsluitstrip	11.-	11	121
PLAN verbindingsstrip 100 cm messing	verbindingstrip	11.-	10	110
FIXA zaag	zaag	15.-	1	15

IKEAs laminaatvloeren

Laminaat	Gebruiks-klasse(n)	Garantie	Aantal m^2 per pak	Prijs per m^2	Prijs per pak	Aantal	Totaalprijs
HEMSE	22	1 jaar	2.51	15.-	37.^{65}	6	225.9
TUNDRA	23	15 jaar	2.26	22.-	49.^{72}	5	248.6
SKIFFER	32	15 jaar	1.92	34.-	65.^{28}	6	337.68

FIGUUR 1 Ingevulde benodigdhedenlijst voor de laminaatvloer

Bij de laatste GWA moet de leerling eerst zijn slaapkamer op schaal 1:50 tekenen. Daarna moet hij de oppervlakte uitrekenen om te weten hoeveel m^2 vochtwerende folie, ondervloer en laminaat nodig is. De omtrek moet worden uitgerekend om te bepalen hoeveel meter muurplint en afsluitlijst gekocht moet worden. De kostenberekening kan op de achterkant van de koophulp worden gemaakt.

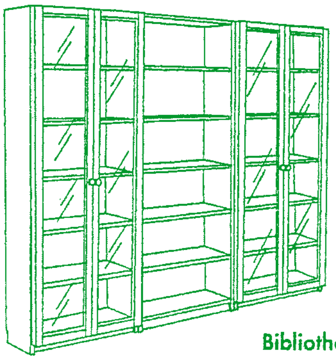
Werkwijze

De leerlingen moesten de opdracht thuis maken. Op school mochten ze zo nodig uitleg vragen. Dat laatste gebeurde nauwelijks. Een volgende keer laat ik de opdracht, net als de GWA's in de eerste klas, tijdens de les maken. Samenwerken en elkaar om hulp vragen kan in de klas ook. Je hebt als docent daarnaast beter in de gaten wat de leerling zelf doet en wat hij van anderen heeft. Je kunt zo nodig corrigerend optreden maar ook leerlingen sneller een zetje in de goede richting geven.

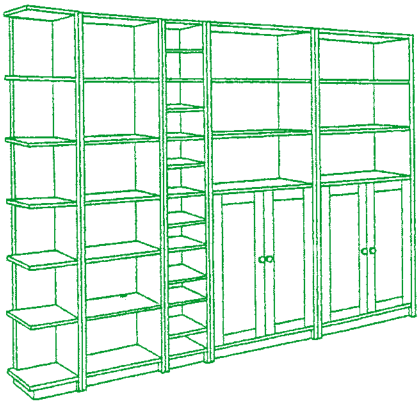
De oppervlakte en omtrek uitrekenen lukte de meeste leerlingen wel. Deze gegevens omzetten in benodigdheden (op de achterkant van de koophulp) leverde meer problemen. op. Bij een paar leerlingen werd volop besteld: zij vulden werkelijk alles in (zie figuur 1). Drie keer ondervloer, drie keer laminaat en voor de rest een berg aan afwerklatjes, plintjes en lijstjes. Andere leerlingen dachten dat zowel de ondervloer als het laminaat per m^2 werd verkocht in plaats van per verpakking. De prijs per m^2 zette de leerlingen op het verkeerde been.
Bij de beoordeling kregen de leerlingen punten voor de berekeningen van oppervlakte, omtrek en schaal, en voor een juiste tekening van de slaapkamer. Daarnaast heb ik vooral gelet op consequentheid: kloppen de hoeveelheden van de bestelde materialen met de berekende oppervlakte en omtrek? Is bijvoorbeeld ook aan de laminaatlijm gedacht en klopt het aantal flessen lijm met het vloeroppervlak?

1. Inleiding

In deze wiskunde opdracht ga je zelf een boekenkast ontwerp maken. Je doet dit met het BILLY boekenkastsysteem van IKEA. Dit is een systeem waarbij je onderdelen van een boekenkast los kunt kopen.
Je kiest bijvoorbeeld zelf of je een boekenkast met deuren maakt of zonder.
Je bepaalt zelf hoe hoog je de boekenkast wordt.
Wil je er een CD-kast bij of misschien een TV-meubel?
Hieronder zie je een paar voorbeelden.



Bibliotheekkast



In de woonkamer.

Om de klant te helpen heeft IKEA een papier gemaakt. Hierop staan alle onderdelen van het BILLY - boekenkastsysteem. Je kunt er ook je eigen ontwerp op tekenen. Daarnaast kun je uitrekenen wat je ontwerp gaat kosten.

2 Planning

Wacht niet met het maken van het werkstuk tot de laatste avond. Je kunt dan niets meer vragen als iets niet duidelijk is. Maak van te voren een planning. Hierin staat wanneer je een stuk van je werkstuk klaar wilt hebben.

1. De tekening is klaar op: ____________________
2. De berekening is klaar op: ____________________
3. Werkstuk inleveren op: ____________________

FIGUUR 2 Deel van het opdrachtenblad bij 'Billy'

Tot slot

Voor de leerlingen was dit geen gemakkelijk werkstuk. Op schaal werken en oppervlakteberekeningen blijven lastige onderwerpen. De resultaten vielen desondanks niet tegen. Bij iedere GWA valt mij op dat andere leerlingen goede cijfers halen dan de gebruikelijke bollebozen. Een GWA appelleert aan andere vaardigheden dan de doorsnee-wiskundesommen in het boek. Zelfstandigheid, probleemoplossend kunnen denken en het kunnen structureren van de werkzaamheden zijn dan even belangrijk als wiskundig inzicht.
De koophulpen bij IKEA zijn niet steeds hetzelfde. Toen ik kort geleden weer bij IKEA was bleek dat er een aantal veranderd was. De wiskunde die je in de koophulpen terug ziet is echter gebleven. Daarnaast heeft IKEA een programma op internet gezet waarmee je een keuken kunt ontwerpen en er 3D in kunt rondlopen. Iets dergelijks hebben ze ook voor het kantoorsysteem *Effektiv*. Je kunt ze vinden op de site van IKEA (*www.ikea.nl*).

Nadere informatie

PDF-bestanden van de GWA's zoals die op mijn school worden gebruikt, zijn te vinden via de website van de NVvW (www.nvvw.nl/gwaikea.html).

Over de auteur

Ruud Jongeling (e-mailadres: rjongeling@tiscali.nl) is als wiskundedocent werkzaam bij het Da Vinci College, een vmbo-school voor basis- en kaderberoepsgerichte leerweg in Roosendaal.

KEUZEONDERWERP COMPUTERALGEBRA

Ervaringen opdoen in vwo-5

[Hans Klein]

Inleiding

Computeralgebraprogramma's en rekenmachines met symbolische algebra zijn al geruime tijd beschikbaar. Een nieuwere ontwikkeling is dat er sinds enige tijd programma's op de markt zijn die de mogelijkheid van symbolisch rekenen combineren met andere toepassingen zoals tekstverwerken, grafieken. Al deze mogelijkheden kunnen dan in één werkblad worden gecombineerd. De programmatuur is dus meer aangepast aan wat de gebruiker inmiddels is gewend. Daarnaast verschijnen er op internet ook plekken waar eenvoudig of meer geavanceerd met symbolische algebra kan worden gewerkt.

De vraag is nu, *of* en *hoe* dit in het wiskundeonderwijs kan worden ingepast. Vooralsnog zou een deel van de ruimte die Praktische Opdrachten, profielwerkstuk en (op het vwo) keuzeonderwerp bieden gebruikt kunnen worden om leerlingen met computeralgebra te laten werken. Op deze manier kan didactische ervaring worden opgedaan met het gebruik van computeralgebra in het middelbaar onderwijs. Dit heeft het voordeel dat het gebruik tot een afgebakende tijdsspanne blijft beperkt. Ook werken eventuele aanloopproblemen niet gelijk door in toetsresultaten. Het PTA moet natuurlijk wel ruimte bieden voor een dergelijke invulling.

In dit artikel wil ik de uitvoering van zo'n keuzeonderwerp computeralgebra bespreken. Daarnaast komen een aantal weblocaties aan bod waar met computeralgebra kan worden gewerkt. Bij dit artikel hoort een website met links naar zulke locaties en pagina's waar gebruikt materiaal kan worden opgehaald.

Keuzeonderwerp computeralgebra

In de cursus 2001-2002 hebben we op het Zernike College met twee wiskunde-B12 groepen in atheneum 5 (totaal 20+6 leerlingen) als keuzeonderwerp computeralgebra 'gedaan'. Hierbij hebben we TI-interactive gebruikt in het kader van het APS Scholennetwerk rond dit programma. Alle materiaal is de leerlingen aangeboden via Blackboard. De opzet van dit keuzeonderwerp is van dien aard dat het ook met andere computeralgebrapakketten of via op internet aanwezige hulpmiddelen zou kunnen worden uitgevoerd.

Het keuzeonderwerp was als volgt opgebouwd: we startten met 2 lessen kennismaking met het programma, gevolgd door 4 lessen waarin dieper werd ingegaan op de mogelijkheden van computeralgebra met dit programma. Omdat het werken met computeralgebra in verband met een toetsperiode zou worden onderbroken, en om de leerlingen en onszelf een tussenevaluatie te bieden, werd dit eerste gedeelte afgesloten met een toets.

Vervolgens konden de leerlingen kiezen uit een aantal opdrachten. Deze waren verschillend van aard, zoals:

- Opdrachten waarbij het mathematiseren voorafgaat aan het gebruik van computeralgebra. Hierbij waren een aantal min of meer bekende optimaliseringsproblemen (maximale inhoud van een goot, optimaal leidingnet tussen vier steden, maximale oppervlakte van een rechthoek binnen een ellips, ...).
- Opdrachten waarbij het pakket gebruikt werd om het probleem te verkennen, waarna verder mathematiseren volgt (raaklijn aan een asteroïde, primitieven bepalen van functies van de vorm $x^n \cdot \sin(x)$, het aantal nullen op het eind van een getal als 2002!).
- Een aantal opdrachten waarbij nieuwe stof buiten het normale programma werd aangeboden (Taylorreeksontwikkeling, oppervlaktebenadering met de regel van Simpson). Bij de afleiding van de theorie werd gebruik gemaakt van de mogelijkheden die computeralgebra biedt.
- Min of meer 'kale' opdrachten waarbij het erom ging reeds aanwezige kennis toe te passen. Met name het gebruik van parameters stond hier centraal (zie bijvoorbeeld figuur 1, opdracht E1).

Omdat niet alle opdrachten even lastig waren en omdat er een wisselend beroep werd gedaan op creativiteit, inventiviteit en doorzettingsvermogen, waren de opdrachten in drie categorieën verdeeld: A, B en C. Leerlingen konden kiezen: hetzij een eenvoudige (A) en een iets ingewikkelder opdracht (B) individueel maken, dan wel een lastige opdracht (C) als duo. Er waren zes opdrachten uit categorie A, vijf uit categorie B en vijf uit categorie C. Om te voorkomen dat te veel leentjebuur werd gespeeld, was het niet toegestaan dat een opdracht meer dan drie keer werd gekozen. Van de opdrachten waren er vijf afkomstig uit het boekje 'Wiskunde Leren met Derive' van Paul Drijvers. Een drietal opgaven is als illustratie op deze bladzijden opgenomen (zie de figuren 1, 2 en 3). Het bestand met alle opdrachten en bijbehorend materiaal is beschikbaar op de website die bij dit artikel hoort.

Ervaringen

De toets tussen het eerste en tweede gedeelte was niet speciaal ontworpen voor het keuzeonderwerp computeralgebra. Bij de start van de nieuwe periode en het teruggeven van de 'gewone toets' over de voorafgaande periode was de leerlingen als introductie op het keuzeonderwerp computeralgebra verteld, dat ze over enkele weken exact dezelfde toets met de computer zouden maken. De stof van deze toets betrof de regels voor differentiëren en asymptoten (Moderne wiskunde B1 deel 4, hoofdstuk A4 en A5).

Bij het evalueren van het gemaakte werk vielen de volgende zaken op:

In het materiaal waarmee de leerlingen met het computeralgebrapakket konden leren omgaan, was nogal veel aandacht besteed aan manieren waarop tussenantwoorden kunnen worden hergebruikt - bijvoorbeeld hoe je bij het bepalen van de extremen van een functie de oplossingen van de vergelijking $f'(x) = 0$ weer in de functie kunt invullen om de y-waarden van de extremen te bepalen. Niet alle leerlingen zagen hier het nut van in; liever werd het antwoord overgetypt. Hiervoor werd puntenaftrek gegeven. De reden hiervoor was dat het niet alleen om het goede antwoord ging (dat kan ook met pen en papier!), maar ook om een algemene en efficiënte oplossingsmethode voor een dergelijk probleem in het computeralgebrapakket.

Een nadeel van deze toets was dat het bepalen van asymptoten nogal prominent aanwezig was terwijl dat in het aangeboden computeralgebramateriaal slechts kort was aangeroerd, omdat het begrip limiet in het B1-programma niet meer voorkomt.

Gelukkig sluit TI-interactive in dit opzicht redelijk aan bij de aanpak die in Moderne wiskunde wordt gevolgd: het voorschrift van de functie omschrijven en daarna door te kijken naar de formule tot de juiste conclusie komen. De opdracht *expand* probeert namelijk een uitdrukking als som van zoveel mogelijk termen te schrijven.

Bijvoorbeeld: expand $\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ levert als antwoord:

$\dfrac{1}{x+1} + x - 1.$

De conclusie dat de grafiek van deze functie een scheve asymptoot heeft kan met een kleine toelichting dan vlot worden gemaakt. (Bij sommige andere computeralgebrapakketten gedraagt de opdracht *expand* zich anders; daar worden alleen eventuele haakjes weggewerkt. Een aanpak via limieten ligt dan meer voor de hand.)

De laatste opdracht van de toets was:

Laat zien dat de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{x+a}$

voor iedere a ongelijk aan nul een extreme waarde $-4a$ heeft.

Dit kostte een aantal leerlingen behoorlijk wat hoofdbrekens. De problemen betroffen zowel de aanpak van een dergelijk probleem in het algemeen, als het werken met parameters in een computeralgebra-omgeving. Gelukkig waren er ook voldoende opgaven aanwezig die wel goed verliepen zodat ondanks de genoemde problemen het eindresultaat van de toets bij alle leerlingen voldoende was.

De zelfstandige opdrachten

Bij het keuzeproces voor het tweede gedeelte was er een duidelijke voorkeur voor opdrachten met een verhaal of een plaatje. Kale opdrachten waren weinig tot niet in trek. Opdracht E1 (zie figuur 1) is een voorbeeld van zo'n opdracht. De enige leerling die deze opdracht heeft uitgevoerd was goed in staat de asymptoten met behulp van *expand* te bepalen. Bij onderdeel (b) kwam hij meteen met het antwoord tevoorschijn. Als motivatie gaf hij: *'Het viel me op dat iedere keer dat ik de waarde van het getal dat in de formule voor de asymptoot bij* $2x$ *wordt opgeteld (in het geval van* $y = 2x - 1$ *dus de* -1*) recht evenredig is aan de waarde van* p*.'* Kennelijk heeft deze leerling een aantal waarden van p geprobeerd en telkens de formule laten herschrijven. Gelukkig heeft hij daarna de gevonden waarde gecontroleerd. Hoewel hij een functievoorschrift had ingevoerd, met de parameter p er op een goede manier in verwerkt, kwam hij niet op de gedachte dezelfde operatie als bij onderdeel (a) gewoon weer toe te passen, maar dan met de parameter p erin. Hij heeft computeralgebra als onderzoeksomgeving/voorbeeldgenerator gebruikt. Misschien realiseerde hij zich ook niet ten volle de kracht van het pakket.

Dat kwam bij de uitvoering van de opdrachten wel vaker voor. Nog al eens werd gekozen voor een benaderde oplossing waar een exacte oplossing even eenvoudig te bereiken was geweest. Zelfs werd soms op grond van een aantal (nogal willekeurig) gekozen waarden van de variabele een conclusie over de waarde van het optimum getrokken, waar een exacte oplossing middels (symbolisch) differentiëren voor de hand had gelegen.

Dat gebeurde bijvoorbeeld ook bij opdracht E5 (zie figuur 2), die door drie leerlingen gemaakt is. Dit is een opdracht waarbij het mathematiseren voorafgaat

E1. A-opdracht

Bekijk de functie $f(x) := \dfrac{2x^3 - 6x^2 - 81x}{x^2 - 30x}$

(a) Bepaal nulpunten, extremen, asymptoten, eventuele perforaties en teken de grafiek met een geschikt gekozen venster.

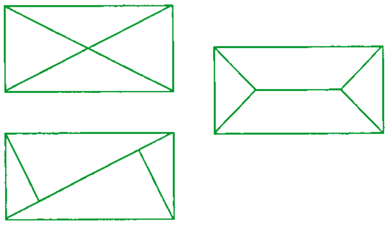
f is een exemplaar van de familie: $f(x) := \dfrac{2x^3 - 2px^2 - 9p^2x}{x^2 - 10px}$

(b) Voor welke waarde van p geldt: $y = 2x - 1$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f?

(c) Voor welke waarden van p geldt: de lijn $y = 10$ raakt aan de grafiek van f?

E5. B-opdracht - Leidingnet

Vier plaatsen vormen samen een rechthoek. Er moet een leidingnet worden gemaakt dat de vier plaatsen met elkaar verbindt. Hiernaast zie je een aantal bouwplannen voor dat leidingnet.



Kies om te beginnen bijvoorbeeld een rechthoek van 2 bij 4.
Welk van de drie is het goedkoopst als je alleen let op de lengte van dit net?
Hoe groot moet je in het rechterplan de hoek van de "Y" kiezen om het goedkoopste net van dit type te krijgen?
Wat is de voordeligste oplossing?
Geldt je oplossing voor rechthoeken van iedere vorm (lengte = a, breedte = b)?

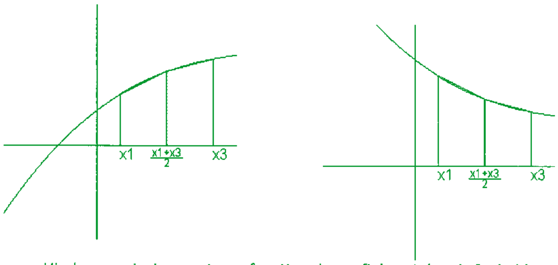
FIGUUR 1 en 2

aan het gebruik van computeralgebra. Bij deze opgave, met name bij de figuur met de 'Y', speelt de keuze van de variabele een belangrijke rol. Alle drie hadden, waarschijnlijk daartoe verleid door de formulering van de opdracht, een hoek als variabele genomen. Dat leverde nogal complexe formules met goniometrische verhoudingen op, althans voor een atheneum 5 leerling. Daarbij werden dan ook wel wat foutjes gemaakt. Eén van de drie differentieerde netjes, één bepaalde het minimum grafisch/numeriek en de derde vulde gewoon een aantal waarden voor de hoek in. De reden daarvoor heeft hij niet vermeld. Een mogelijke oorzaak zou geweest kunnen zijn dat hij in zijn formules het gradenteken heeft gebruikt. Helaas zal het programma dan klagen dat er een fout in de formule zit. Dit teken kan namelijk alleen gebruikt worden om een getal naar graden te converteren. Dus moest hij de variabele (a) wel eerst een waarde geven. Daarna kun je dus niet meer differentiëren, althans je hebt een constante functie met afgeleide nul gecreëerd... Of dit ook het geval is geweest stond niet in zijn presentatie.

Integraalbenaderingen

Heel leuk was het moment waarop tijdens een gesprek met een leerling over opdracht E6 (integraalbenaderingen) deze zich ineens wel de kracht van TI-interactive realiseerde (zie figuur 3). Een gedeelte van de uitwerking van deze opdracht met behulp van het online computeralgebra applet WIRIS staat in figuur 4 en 5. Bij deze opdracht bleek veel hulp noodzakelijk. Tot en met de eerste helft van onderdeel e ging het goed. De tweede helft van onderdeel e (over de fout bij hogere graads functies) snapten de leerlingen niet zonder uitleg. Degenen die dat niet hebben gevraagd zijn hier ook niet uitgekomen. Deze vraag was als motivering bedoeld voor onderdeel f en g. Ook onderdeel f bleek niet zonder hulp te kunnen. Hier werden door de leerlingen die niet om hulp hadden gevraagd dan ook formules gegeven die in feite weer neerkwamen op de trapeziumregel. Ook de leerling die er met enige uitleg wel was uitgekomen (toch nog een knappe prestatie om de gevraagde formule netjes met Σ-tekens vorm te geven, wat hem wel is gelukt) koos bij onderdeel g als voorbeeld een derdegraads functie. De transfer van onderdeel e naar dit onderdeel was bij hem dus eigenlijk ook niet gelukt. Misschien is het verstandiger bij een opdracht als deze in een inleiding aan te geven wat eigenlijk het doel van de opdracht is. Een andere optie is misschien om de leerlingen te laten onderzoeken of er ook andere verdelingen van het

E6. C-opdracht - Integraalbenadering



Hierboven zie je van twee functies de grafiek getekend. In beide gevallen wordt de oppervlakte onder de grafiek tussen $x1$ en $x3$ benaderd met behulp van een Riemannsom met twee deelintervallen. Als hoogte van de twee staafjes is gekozen: gemiddelde van linkergrens en rechtergrens.

(a) Laat zien dat de Riemannsom in beide gevallen gelijk is aan:

$$\frac{f(x1)+2f(\frac{x1+x3}{2})+f(x3)}{4}\cdot(x3-x1)$$

Deze methode staat in de praktijk bekend als de trapeziumregel. Waarom?

(b) Leg uit dat als je het aantal staafjes vergroot in het linkerplaatje de benaderde oppervlakte altijd te klein zal zijn en in het rechterplaatje altijd te groot, hoe groot je het aantal staafjes ook neemt.

(c) Je kunt de uitdrukking $\frac{f(x1)+2f(\frac{x1+x3}{2})+f(x3)}{4}$ als een soort gewogen gemiddelde van $f(x1)$, $f((x1+x3)/2)$ en $f(x3)$ beschouwen. Misschien is het mogelijk door andere wegingsfactoren te kiezen een betere benadering te krijgen. Bepaal het getal k zo, dat $\frac{f(x1)+k\cdot f(\frac{x1+x3}{2})+f(x3)}{k+2}\cdot(x3-x1)$ de waarde van $\int_0^1 x^2dx$ exact weergeeft.

(Kies dus $x1=0$ en $x3=1$.)

(d) Onderzoek of je met de gevonden waarde van k ook $\int_{x1}^{x3}(ax^2+bx+c)dx$ voor alle $x1$, $x3$, a, b en c exact kunt bepalen.

(e) Levert de gevonden waarde van k ook "exacte" benaderingen voor 3e-graads veeltermen?
En voor 4e-graads of hogere-graads veeltermen? Laat zien dat de fout bij 4e graads veeltermen alleen afhangt van $x3$- $x1$ en bij veeltermen met een graad groter dan 4 ook van $x1+x3$.

(f) De benadering die je in de vorige onderdelen hebt bestudeerd staat bekend als de regel van Simpson.
Als je het gebied tussen $x1$ en $x3$ in meer deelintervallen wilt verdelen, krijgt de trapeziumregel een vorm als:
$(½f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+ \ldots +f(x_{n-1})+½f(x_n))*\Delta x$.
Leg dit uit. Hoe wordt in dit geval de regel van Simpson?

(g) Gebruik deze uitgebreide regel van Simpson om voor een paar zelf gekozen integralen (geen veeltermfuncties) een benadering te geven die aan een aantal door jou te formuleren eisen voldoet. Vergelijk het resultaat met dat van de trapeziumregel en met de exacte waarde of de benadering die Tii geeft. Probeer de berekeningen kort te houden m.b.v. de opdracht sum (Σ).

FIGUUR 3

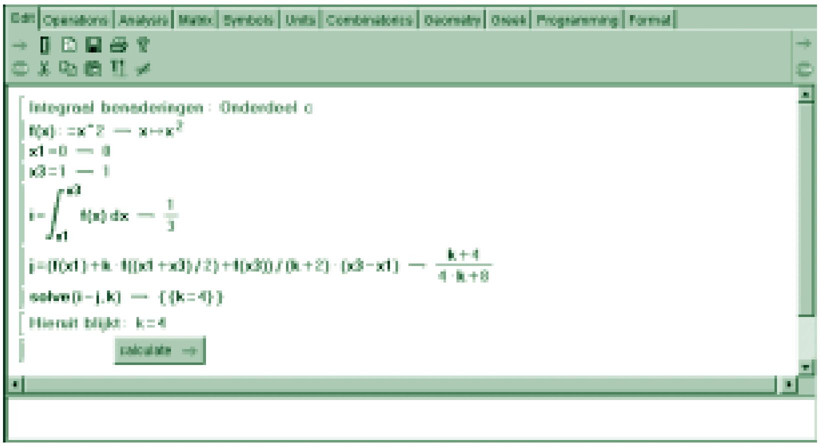
integratie-interval mogelijk zijn die tot een nauwkeurig resultaat leiden. Deze opdracht was bedoeld als uitdaging voor de betere leerlingen en mocht dan ook door duo's worden gemaakt. De twee groepjes die onvoldoende om hulp hebben gevraagd (en trouwens ook te laat waren begonnen) hebben zich misschien door de mogelijkheid met zijn tweeën één opdracht te maken laten verleiden deze opdracht te kiezen.
Bij het aanbieden van de opdrachten is de leerlingen duidelijk gemaakt dat ze soms van de Help-functie van het programma gebruik zouden moeten maken om de opdrachten tot een goed einde te brengen. Daar waar nodig hebben ze dit inderdaad gedaan.

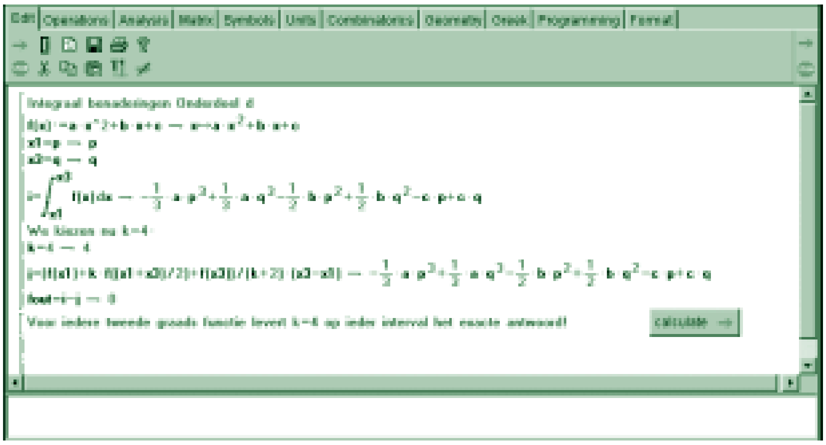
Beoordeling

Het eindcijfer voor het keuzeonderwerp werd als volgt bepaald: Maximaal waren 20 punten te behalen. De toets telde hierin mee voor 7 punten. Voor het zelfstandig gedeelte waren nog 13 punten beschikbaar: 7 punten voor de wiskundige inhoud, 3 punten voor de presentatie in TI-interactive en een bonus van 3 punten indien wiskundige inhoud of presentatie daar aanleiding toe zouden geven. Hierbij valt bijvoorbeeld te denken aan een meetkundige oplossing van een probleem dat ook algebraïsch via computeralgebra is opgelost of een anderszins veelzijdige of bijzonder elegante benadering van een probleem. Een aantal leerlingen heeft dit inderdaad geprobeerd en heeft daarbij mooie dingen laten zien, b.v. een poging een meetkundig bewijs te leveren voor de vorm van een optimale goot, of een afleiding van de formule van een asteroïde.

Voor wie zelf aan de slag wil

Zoals in de inleiding is besproken, is computeralgebra ruimschoots voorhanden. Van sommige pakketten is een goedkope studentenversie beschikbaar (Mathcad). Van TI-interactive is een demoversie beschikbaar via de website van Texas Instruments. Deze is gedurende 30 dagen volledig functioneel. Deze demo staat ook op sommige CD-roms die bij de TI-83 Plus is geleverd. Voor degenen die met dit programma willen werken, heb ik alle gebruikte TI-bestanden via internet beschikbaar gesteld. Van het programma Mupad is een gratis 'Light'-versie beschikbaar. Hoewel erg krachtig, is deze versie niet erg gebruiksvriendelijk. Er is ook een 'zware' versie, Mupad Pro.
Interessante mogelijkheden biedt ook het WIRIS-applet, bereikbaar via *www.mathsformore.com* (kies voor Engels, Examples). Dit is een applet op een





FIGUUR 4 en 5

Spaanse server die communiceert met een computeralgebrapakket op deze server. Zodoende ontstaat een volwaardig computeralgebrasysteem via internet. Voordeel hiervan is dat voor meer incidentele toepassingen de leerlingen niet hoeven te worden voorzien van software. Een nadeel is natuurlijk wel dat je afhankelijk bent van de luimen van de aanbieder: het kan best zijn dat de applet gedurende kortere of langere tijd niet beschikbaar is. Ook is de stabiliteit niet altijd even groot. Het was tijdens het testen van WIRIS niet altijd mogelijk contact te krijgen met de server. Het leuke van deze toepassing is dat je gemaakt werk kunt opslaan als html-bestand. Het is zodoende mogelijk interactieve webpagina's met computeralgebra te maken. Een aantal voorbeelden hiervan kunt u vinden op de bij dit artikel behorende webpagina's. Omdat WIRIS zelf op de Spaanse server staat is dit ook een heel geschikte mogelijkheid om computeralgebra binnen een Blackboard omgeving te gebruiken.

Naast WIRIS zijn er ook een aantal meer beperkte mogelijkheden op internet om via webpagina's met invulvelden computeralgebra-opdrachten te geven. Op de bij dit artikel behorende webpagina's zijn hier ook links en voorbeelden van aanwezig.

Materiaal en informatie

Bij dit artikel hoort een website:
http://home.wxs.nl/~hklein/compalg/index.htm
Op dit adres kunt u het gebruikte materiaal ophalen. Ook zijn er pagina's waar on-line computeralgebra-pakketten kunnen worden geraadpleegd en een pagina met links naar adressen waar demoversies van een aantal pakketten kun worden opgehaald.
Verder materiaal is te vinden op:
- *www.fi.uu.nl/adlo* (zie ook het artikel over het Adlo-project in Euclides 78-3, december 2002)
- *www.aps.nl/t3*
- *http://education.ti.com/us/product/software/tii/features/features.html* (voor een demoversie van TI-interactive).

Over de auteur

Hans Klein (e-mailadres: hklein@wxs.nl) is docent aan het Zernike College te Haren. Zijn speciale belangstelling gaat uit naar ICT-gebruik in de wiskunde. Hij beheert ook een website speciaal gewijd aan wiskunde, http://home.wxs.nl/~hklein/math.htm

WISKUNDE IN VAZEN

De vazen van Daniel Bernoulli

[Rob Bosch]

Daniel Bernoulli beschreef in 1768 een eenvoudig vaasmodel voor diffusieverschijnselen. Hij ging uit van twee vazen: een vaas met rode ballen en een tweede vaas met evenveel blauwe ballen. Het diffusieverschijnsel wordt nu gesimuleerd door uit beide vazen een bal te trekken en ze van vaas te laten wisselen. Een proces dat men kan herhalen zolang men wil. De bijbehorende vraag is hoeveel rode ballen de eerste vaas bevat na een bepaald aantal wisselingen.

Nummer de rode ballen van 1 tot en met n. We volgen de wisselingen van de rode bal met nummer 1. Aangezien de vazen na iedere wisseling weer n ballen bevatten, is de kans dat rode bal met nummer 1 op een bepaald moment uit een van de vazen wordt getrokken gelijk aan $\frac{1}{n}$. De rode bal met nummer 1 bevindt zich na k wisselingen weer in vaas 1 als de bal een even aantal malen getrokken is.
De kans hierop is

$$\sum_{m \text{ even}} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-m} \qquad (1)$$

Deze kans kan worden opgevat als de kans op een even aantal successen bij een binomiale verdeling met succeskans $p=\frac{1}{n}$ en k herhalingen. Deze kans kan op verrassend eenvoudige wijze berekend worden.

$$\sum_m \binom{k}{m} p^m q^{k-m} + \sum_m \binom{k}{m} (-p)^m q^{k-m} = 2 \sum_{m \text{ even}} \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

Het linkerlid van deze uitdrukking herleiden we met het Binomium van Newton, zodat

$$(p+q)^k + (-p+q)^k = 2 \sum_{m \text{ even}} \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

Aangezien $p+q=1$ is de kans op een even aantal successen

$$\sum_{m \text{ even}} \binom{k}{m} p^m q^{k-m} = \frac{1}{2}[1+(q-p)^k]$$

Voor de Bernoulli-vazen geldt $p=\frac{1}{n}$ en $q=1-\frac{1}{n}$ zodat we voor de uitdrukking (1) vinden

$$\sum_{m \text{ even}} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-m} = \frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right]$$

Aangezien deze kans voor elk van de n rode balletjes geldt, is de verwachtingswaarde van het aantal rode balletjes in vaas 1 na k wisselingen gelijk aan

$$\frac{n}{2}\left[1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right]$$

De limiet voor $k \to \infty$ van de verwachtingswaarde is gelijk aan $\frac{n}{2}$ hetgeen de lezer vermoedelijk niet zal verbazen.
Laplace (1812) bestudeerde in zijn *Théorie Analytique des Probabilités* het bovenstaande model in iets algemenere termen. Hij gaat daarbij uit van twee vazen: één met n_0 rode en $n-n_0$ blauwe ballen en één met $n-n_0$ rode en n_0 blauwe ballen.
Ik laat het graag aan de lezer over na te gaan wat de verwachtingswaarde wordt in het model van Laplace.

Literatuur

W. Feller: An Introduction to Probability and its Applications (John Wiley & Sons, 1974).

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

UITSLAG WISKUNDE SCHOLEN PRIJS 2003

[Heleen Verhage]



Prijsuitreiking op het Pleincollege Eckart te Eindhoven

Na het succes van vorig jaar is in april 2003 opnieuw de Wiskunde Scholen Prijs uitgereikt. Deze prijs is ingesteld om scholen voor voortgezet onderwijs te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. De scholen konden meedingen naar de prijs in de categorieën basisvorming (klas 1 en 2), bovenbouw vmbo (klas 3 en 4) en havo/vwo (de klassen 3 t/m 6). De hoofdprijs van €2000 is uitgereikt in de categorie havo/vwo. In de categorie vmbo is een eerste prijs uitgereikt van €1000. In de categorie bavo eindigden twee inzendingen ex aequo. De jury heeft besloten in deze categorie geen eerste, maar wel twee tweede prijzen van €500 uit te reiken.
Enkele aspecten die meewogen in het oordeel van de jury, waren:
- Is het project schoolbreed of is het een initiatief van een afzonderlijke docent?
- Komt de wiskunde op een natuurlijke manier in het project naar voren of is die er met de haren bij gesleept?
- Hoe origineel is het idee?
Voor belangstellenden is het volledige juryrapport te vinden op *www.wiskundescholenprijs.nl.*

Winnende inzendingen in 2003

Categorie bavo

- 2e prijs (€500): *V+ / Het Heelal* van het Pleincollege Eckart te Eindhoven.
In een vwo+ klas (bevolkt door leerlingen met een vwo-advies dan wel een havo-advies met hoge Citoscore) wordt een themaweek over het heelal gehouden. De vakken wiskunde, techniek en biologie zijn daarbij geïntegreerd.
- 2e prijs (€500): *Nederland = Aardappelland* van SG Tabor, locatie Oscar Romero, Hoorn.
Praktische opdracht rond het meten en wegen van aardappels. Verwerking van de meetgegevens met het computerprogramma VU-Stat.

Categorie vmbo

- 1e prijs (€1000): *Zij hoorden het kwartje vallen* van OSG Singelland, locatie Wuiteweg, Drachten.
Lesmateriaal over berekeningen in de bouw. Onderdeel is een excursie naar een nieuwbouwlocatie waarbij leerlingen ter plekke uitzoeken wat de bouwvakkers uit de verschillende bedrijfstakken zoal moeten berekenen.

Categorie havo/vwo

- Hoofdprijs (€2000): *The Golden Section* van CSG Liudger, locatie Raai, Drachten.
Leerlingenuitwisseling van twee keer een week met het buitenland (Duitsland, Engeland, Hongarije).
Leerlingen werken met elkaar aan het thema ‘de gulden snede’ (wiskunde en biologie). De voertaal is Engels.

De prijzen worden op de afzonderlijke scholen uitgereikt, waar mogelijk in combinatie met een activiteit van het winnende project.
Meer over het Golden Section project is te vinden elders in dit blad. De andere winnaars komen in volgende nummers van Euclides aan de orde.

Informatie

Meer informatie over de prijs is eveneens te vinden op *www.wiskundescholenprijs.nl.*
De sluitingsdatum voor deelname aan de Wiskunde Scholen Prijs 2004 is 15 februari 2004.

Over de auteur

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en projectmanager van het WisKids project. Tevens is zij de organisator van de Wiskunde Scholen Prijs.

De Wiskunde Scholen Prijs is onderdeel van het WisKids project.

Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken.
WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO.
Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het Ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.
Het prijzengeld van de Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en door de NVvW.
Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per email: *wiskids@fi.uu.nl*

AND THE WINNER IS... THE GOLDEN SECTION!

Prijswinnend project van de Wiskunde Scholen Prijs 2003

[Heleen Verhage]

Inleiding

Het is geen straf om op zaterdag 5 april naar Drachten af te reizen om daar de hoofdprijs van de Wiskunde Scholen Prijs 2003 uit te reiken op het CSG Liudger, locatie Raai. Rond tien uur word ik opgewacht door Peter Vaandrager, een van de drijvende krachten achter het winnende project 'The Golden Section'. De prijsuitreiking zal later op de ochtend plaatsvinden, in aanwezigheid van vertegenwoordigers van de deelnemende partnerlanden die voor een tweedaagse evaluatie- en planningsbijeenkomst in Drachten bijeen waren.

Tussendoor hebben Peter en zijn collega's tijd om me wat meer over het project te vertellen. En passant toont Peter mij ook de wiskunst aan de plafonds van de wiskundelokalen (gemaakt door leerlingen en door wiskundecollega's) en de mooie werkruimte van de wiskundesectie (zie figuur 1).

Internationale uitwisseling

The golden section is onderdeel van een internationaal uitwisselingsprogramma van twee keer een week met Duitsland, Engeland en Hongarije. Elke leerling is een week te gast bij een buitenlandse leerling en is in de andere week gastheer/vrouw van die buitenlandse leerling. Elke week heeft een thema, waarbij de ene week 'exact' ingevuld wordt en de andere 'sociaal-cultureel'. De afgelopen twee jaar was het thema van de exacte week de Gulden Snede, met wiskunde en biologie geïntegreerd. Het begeleidende docententeam van het Liudger bestaat uit vier docenten wiskunde en één docent biologie. Het uitwisselingsproject valt tot nu toe onder de vrije ruimte, maar men heeft plannen om het vervangend te laten zijn voor het zebrablok in 6 vwo. Aanvullend kunnen leerlingen dan nog een deel van het gelijknamige Zebraboekje doorwerken. Vwo-5-leerlingen uit alle vier de profielen doen er aan mee. Naast het hier besproken Golden Section project is er overigens ook nog een uitwisselingsprogramma met Polen. De leerlingen kunnen kiezen aan welke van de twee ze meedoen. Zodoende nemen er dertig leerlingen deel aan het Golden Section project. Vijftien daarvan blijven in Drachten en treden op als gastheer of –vrouw voor de leerlingen uit de andere drie landen (vijf leerlingen per land). De andere vijftien Drachtster scholieren reizen af naar de partnerscholen, onder begeleiding van een docent. De tweede week zijn de rollen van gast en gastheer/vrouw verwisseld: de thuisblijvers gaan dan naar het buitenland.

In de uitwisselingsweek zijn de deelnemende leerlingen in alle vier de landen bezig met een project, dat per land wordt ingevuld. In het Golden Section project wordt er dagelijks een dagdeel aan het thema gewerkt. De groepjes zijn uiteraard internationaal samengesteld; de voertaal is Engels.

Programma

Het programma voor The Golden Section themaweek luidt:

- Maandagmiddag: introductie. Aan de hand van een serie oriënterende opdrachten wordt op deze werkmiddag kennis gemaakt met de Gulden Snede.

- Dinsdagmorgen: drie workshops, in een roulatiesysteem volgen alle leerlingen de verschillende workshops:
1. Meetkundige constructies van de gulden snede, de gulden rechthoek en de gulden spiraal (zie figuur 3).
2. Het Fibonacci-spel.[1]
3. De gulden snede in de natuur.
- Op woensdag is er een excursie naar Amsterdam (Rijksmuseum, boottocht).
- Donderdagmorgen: creatieve verwerking. Naar keuze verdiepen leerlingen zich in de architectuur van Le Corbusier, maken ze een bouwwerk met gulden afmetingen of zijn ze creatief bezig in het platte vlak (o.a. vijfhoeken).
- Vrijdagmorgen en –avond: verslaggeving en presentatie voor ouders. Het maken van een krant, voorbereiden van presentaties van de verschillende dagen, voorbereiden van een nationale presentatie en bij voldoende animo wordt er een internationale band gevormd. ‘s Avonds worden de presentaties uitgevoerd voor ouders. Tevens is er een internationaal buffet: alle leerlingen nemen typische gerechten van hun land mee.

De overige dagdelen worden eveneens besteed aan buitenschoolse activiteiten, waaronder een middag kaatsen, een Friese balsport. Gedurende de week wordt ook een Engelstalige krant gemaakt, waarin verslag wordt gedaan van de diverse activiteiten. Uit de krant blijkt dat de gasten ook wat woordjes Fries hebben geleerd. Naast het bekende heit en mem hebben ze ook tot vijf leren tellen: ien, twa, trije, fjouwer, fiif.

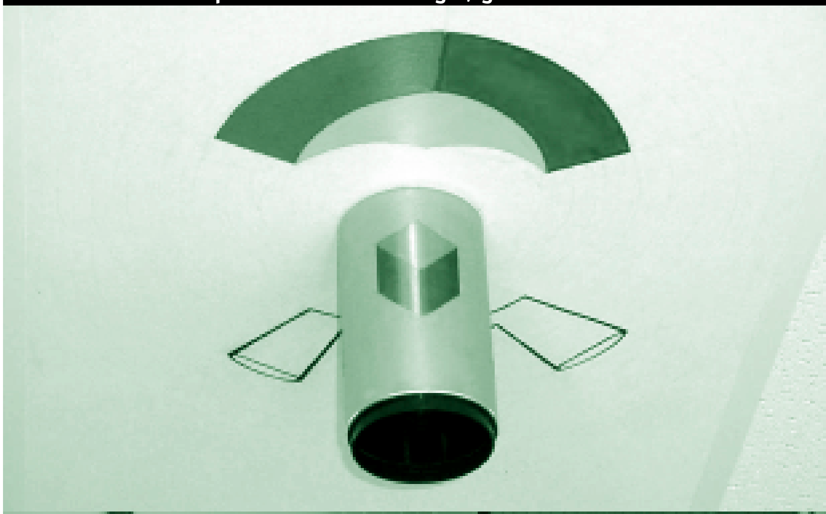
Gouden greep

Bert Wikkerink vertelt dat het best een gewaagde onderneming was om het vak *wiskunde* te kiezen als invulling voor de themaweek. De meeste scholen die aan internationale uitwisseling doen, kiezen de veilige weg van een taal of geschiedenis als aandachtsgebied. Maar de enthousiaste wiskundesectie van het Liudger, aangevuld met een collega biologie, zag de gulden snede helemaal zitten en ging aan de slag om een programma voor de themaweek te ontwerpen. Voordeel van de gulden snede is dat die gemakkelijk tot de verbeelding spreekt, dat er veel (meer of minder serieuze) verschijningsvormen en toepassingen van zijn en dat er in wiskundig opzicht voor iedereen wel wat te halen valt. Verder is de gulden snede niet gebonden aan een land of cultuur: het is een universeel en tijdloos thema uit de wiskunde. Gelukkig hebben ook de beoordelaars van het financierende Comenius-programma waardering voor deze keus: zij spreken zelfs over een *gouden greep.*

Juryrapport

De jury van de Wiskunde Scholen Prijs beoordeelt deze inzending unaniem als de beste van de zestien die er zijn binnengekomen en heeft daarom de hoofdprijs van €2000 toegekend aan dit project.
In het juryrapport valt te lezen:
De jury heeft veel waardering voor het initiatief om een

FIGUUR 1 Een kunstobject (anamorfose) aan het plafond van het Liudger, gemaakt door Bert Wikkerink



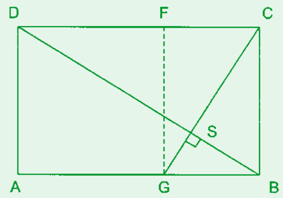


FIGUUR 2 Leerlingen aan het werk tijdens het project

FIGUUR 3 Een opdracht uit het lesmateriaal

Hoe herken je een gouden rechthoek?

- Fold the paper on the diagonal BD.
- Fold it perpendicular to the diagonal by point C.
- If AG equals AD then the rectangle is a Golden Rectangle.
- Fold the paper on the line AF to check this.
- Measure the sides to check if you are right.
- Is an A4 sized paper a Golden Rectangle?





FIGUUR 4 De prijsuitreiking

internationale uitwisseling te koppelen aan een themaweek. De gulden snede is een goed gekozen onderwerp omdat de benodigde wiskunde toegankelijk is voor alle (ook buitenlandse) leerlingen van die leeftijd en zeker ook uitdagingen biedt. De uitvoering weerspiegelt een gevarieerd programma waar tekenen, rekenen en presenteren in goede balans terugkomen. Naast wiskunde, biologie en uiteraard Engels is er in het ontwikkelde lesmateriaal ook aandacht voor natuur, kunst en architectuur.
Uitstekend idee om zo internationale uitwisseling te versterken. Idee van het project en lesmateriaal zijn zeker overdraagbaar. Terugvertalen naar het Nederlands is uiteraard mogelijk.

Enthousiaste sectie

Voorafgaand aan de officiële prijsuitreiking woon ik een korte presentatie bij van de toekomstplannen voor de themaweek. Peter presenteert een idee voor een nieuw project dat hij samen met twee collega's uit Italië (dit land doet voor het eerst mee) heeft bedacht. Het plan is om een statistiekproject te gaan doen, waarbij de deelnemende leerlingen vooraf in hun eigen land een bepaalde vragenlijst gaan afnemen. In de themaweek worden de gegevens verwerkt, en worden de landen met elkaar vergeleken. Daarnaast is het de bedoeling om de leerlingen een dag lang aan een 'open assignment' te laten werken, zeg maar een A-lympiade opdracht. Laat ik nou voor de buitenlandse gasten ook een kadootje bij me hebben: de Engelstalige versie van het boekje '*10 jaar Wiskunde A-lympiade*'!
Na de feestelijke uitreiking van de €2000 zit mijn klus erop. De rest van het gezelschap heeft nog iets te vieren, want de internationale uitwisseling bestaat 10 jaar. In een antieke autobus reizen de Drachtsters met hun gasten af naar Dokkum, om daarna een boottocht op de Waddenzee te maken.
Mijn bezoek aan de school bevestigt wat de jury ook al afleidde uit de inzending: hier is een zeer enthousiaste wiskundesectie aan het werk die staat voor haar vak en voortdurend bezig is met onderwijsontwikkeling.

Met dank aan de docenten: Jon Keun, Jacoba Zijsling, Bert Wikkerink, Peter Vaandrager (alle vier wiskunde) en Marianne Feenstra (biologie).

Wie meer over dit project wil weten of belangstelling heeft voor de lesbrieven, kan contact opnemen met Peter Vaandrager (e-mailadres: *p.vaandrager@csgliudger.nl*).

Noot

---

[1] Het Fibonacci-spel wordt gespeeld in tweetallen. Op tafel ligt een stapel stenen waar de spelers om de beurt een of meer stenen afnemen, volgens de regels:
- De eerste speler neemt zo veel stenen als die wil, maar niet allemaal.
- Daarna pakt iedere speler zoveel stenen als die wil, maar niet meer dan het dubbele van wat de tegenstander nam.
- Wie de laatste steen pakt, heeft gewonnen.
Te bewijzen valt, dat de speler die begint als er een Fibonacci-getal (2, 3, 5, 8, 13, ...) aan stenen ligt, het spel zal verliezen (aangenomen dat de andere speler goed speelt). De speler die begint met een niet-Fibonacci-getal kan het spel winnen (zie ook de webverwijzingen).

Webverwijzingen

Over het Fibonacci-spel:
- http://library.thinkquest.org/c005449/fibgame.html
- www.nku.edu/~longa/classes/2002fall/mat115/days/day09/newfib.html
Over de gulden snede in de architectuur:
- www.phys.tue.nl/TULO/info/guldensnede/architectuur.html
Over Fibonaccigetallen:
- www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Literatuur

Wim Kleijne, Ton Konings: De Gulden Snede, Zebrareeks deel 4, Epsilon Uitgaven (Utrecht, 2000).

Over de auteur

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en projectmanager van het WisKids project. Tevens is zij de organisator van de Wiskunde Scholen Prijs.

De Wiskunde Scholen Prijs is onderdeel van het WisKids project.

Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken.
WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO.
Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het Ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.
Het prijzengeld van de Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en door de NVvW.
Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per email: *wiskids@fi.uu.nl*


De
Nederlandse
Wiskunde
Olympiade

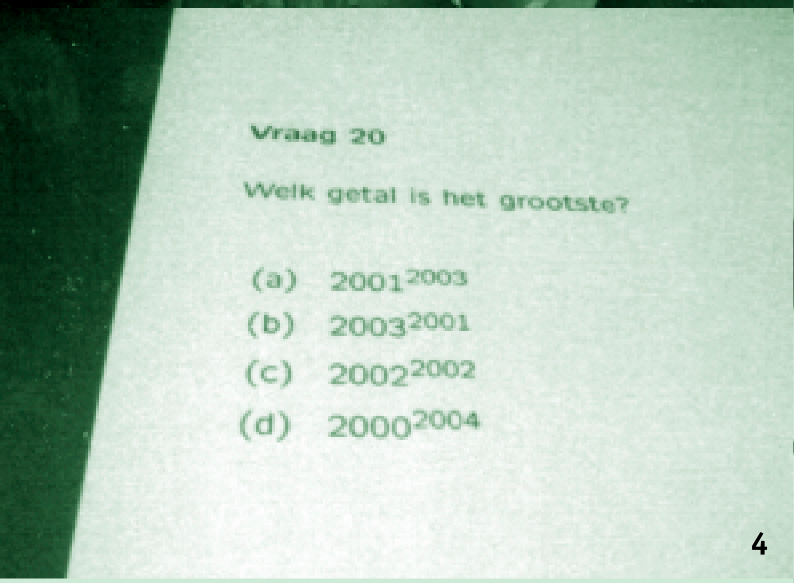
1



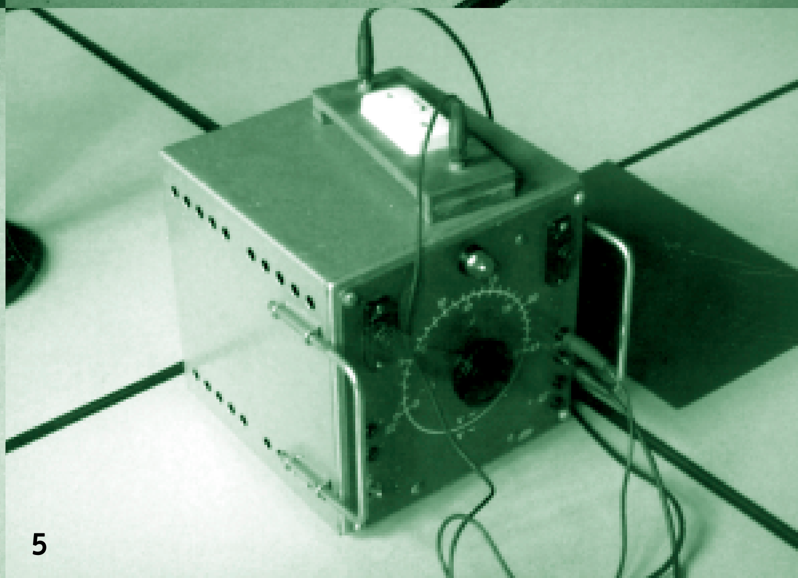
2


2003

3


Vraag 20
Welk getal is het grootste?
(a) 2001^{2003}
(b) 2003^{2001}
(c) 2002^{2002}
(d) 2000^{2004}

4



5



6

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 2003: UITREIKING SCHOLENPRIJS EERSTE RONDE

De door Shell ingestelde wisselprijs voor de school met de hoogste totaalscore gaat dit jaar weer naar het Stedelijk Gymnasium in Breda.

[Fred Bosman, Wim Laaper]

Groeiende belangstelling

Het aantal scholen dat dit jaar aan de eerste ronde heeft deelgenomen is 190. Dat is een stijging ten opzichte van vorig jaar, toen er 171 scholen hebben meegedaan. De groeiende belangstelling voor deelname aan de Olympiade die in 2002 is begonnen, lijkt van blijvende aard. De stijging van het aantal deelnemers is nog veel groter. Dit jaar hebben 2497 leerlingen meegedaan in de eerste ronde, en dat is een stijging van maar liefst 36% ten opzichte van vorig jaar.
Het lijkt erop dat meer 'reclame' voor de Olympiades vruchten afwerpt. Die reclame heeft voor wiskunde de vorm gekregen van een boek met de titel 'De Nederlandse Wiskunde Olympiade, 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden' (zie foto 1). Voor een recensie van dit boek zie Euclides 78-5 (februari 2003).
Het boek is cadeau gegeven aan alle leerlingen die hebben meegedaan aan de eerste ronde. De uitgave is mogelijk gemaakt door financiële steun van het Wiskids Project, Dr. A.H. Hoekstra (†), het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de Nederlandse OnderwijsCommissie voor Wiskunde en de Gratama Stichting.

Beste school

De scholenprijs is dit jaar weer gewonnen door het Stedelijk Gymnasium in Breda. Ook in 2002 ging de prijs naar dit gymnasium. De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen. Ter informatie: het maximaal te behalen punten is 110.
De leerlingen die samen deze prestatie onder de bezielende leiding van Wiel Cleven hebben geleverd, zijn (zie foto 2 en 3):
Johan Konter uit Zevenbergen met 17 punten,
Loes Verdaasdonk uit Prinsenbeek met 15 punten,
Matthijs Melissen uit Breda met 14 punten,
Jelle Nuijten uit Terheijden met 12 punten, en
Kirsten Westerhout uit Breda met 11 punten.
Hieronder volgt een lijst van de topvijf van scholen waarvan de beste 5 leerlingen samen een score van 50 of meer punten hebben behaald.

School, plaats	Aantal deeln.	Docent/ wedstrijdleider	Somscore
Stedelijk Gymnasium, Breda	24	W. Cleven	69
Stedelijk Daltoncollege, Zutphen	20	H.M. Odijk	59
Gymnasium Haganum, Den Haag	12	E. Huussen	57
St. Odulphus Lyceum, Tilburg	8	B. Wennekes	55
Elzendaalcollege, Boxmeer	35	H. Alink	55

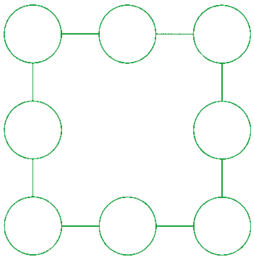
De Grote Wiskunde Quiz

Ter gelegenheid van de prijsuitreiking in het gebouw van het Stedelijk Gymnasium Breda op 1 april werd De Grote Wiskunde Quiz gespeeld. Quizmaster prof. Jan van de Craats, voorzitter van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, vuurde menig lastig vraagje af op de deelnemende groepen leerlingen van het Stedelijk Gymnasium. Een voorbeeld daarvan is te zien op foto 4.
Op de foto's 5 en 6 een impressie van apparatuur waarmee de groepen zich bij de quizmaster konden melden voor het geven van het antwoord.

Twee opgaven

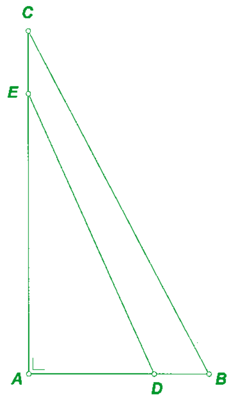
Tenslotte een tweetal opgaven met uitwerking uit de eerste ronde.

A1. De getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 moeten zo over de rondjes in de figuur verdeeld worden dat de som van de drie getallen op elk van de vier zijden van het vierkant hetzelfde is.



Geef een oplossing waarbij geldt dat die som minimaal is.

B2. Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met $AB = 8$, $AC = 15$ en $BC = 17$.



Op de zijde AB ligt punt D en op de zijde AC ligt punt E zó, dat
- de oppervlakte van ADE gelijk is aan $\frac{3}{4}$ van de oppervlakte van ABC, en
- de omtrek van ADE gelijk is aan de omtrek van $BCED$.
Bereken de lengte van DE.

Uitwerkingen

A1.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Als S de som is van de drie getallen op elke zijde, dan geldt $4S = 36 +$ de vier getallen op de hoekpunten. Om S zo klein mogelijk te maken moet de som van de getallen op de vier hoekpunten zo klein mogelijk zijn. Dat lukt niet met 1, 2, 3, 4, omdat dan $4S = 36 + 10 = 46$ en 46 is niet deelbaar door 4. De kleinste waarde die we kunnen proberen voor S is dus 12, want $48 = 4 \times 12$.
Dat geeft de mogelijkheden:
$48 = 36 + 1 + 2 + 3 + 6$ of
$48 = 36 + 1 + 2 + 4 + 5$.
1 en 2 kunnen niet op één zijde liggen omdat je dan 9 nodig hebt om 12 te krijgen. Dus moeten 1 en 2 op een diagonaal liggen, en dus ook 3 en 6 op een diagonaal.
Dat geeft de oplossing

1	8	3
5		7
6	4	2

afgezien van draaiingen en spiegelingen.
De tweede mogelijkheid 1, 2, 4, 5 geeft geen oplossing.

B2.
Noem AD x en AE y, dan geldt $xy = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot 15 = 90$. Voor de omtrekken geldt: $x + y + DE = (8 - x) + (15 - y) + DE + 17$, dus $x + y = 20$. Dus $y = 20 - x$ en $x^2 - 20x + 90 = 0$.
Dat geeft $x = 10 - \sqrt{10}$ en $y = 10 + \sqrt{10} \cdot (10 + \sqrt{10})^2 = 110 + 20\sqrt{10}$ en $(10 - \sqrt{10})^2 = 110 - 20\sqrt{10}$ en dus is $DE = \sqrt{220} = 2\sqrt{55}$.
(Anders: $DE^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 20^2 - 2 \cdot 90 = 220$)

De andere opgaven en uitwerkingen, en die van andere jaren, zijn te vinden op
http://olympiads.win.tue.nl/nwo/

Over de auteurs

Fred Bosman (e-mailadres: fred.bosman@citogroep.nl) is secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Wim Laaper (e-mailadres: wlaaper@iaehv.nl) is redacteur van Euclides.

Aankondiging / Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 6 en zaterdag 7 februari 2004 worden de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum De Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Omdat het dan de tiende keer is, zullen de dagen een extra feestelijk tintje krijgen.
Kosten per persoon: € 310,00 bij overnachting op een tweepersoons kamer, € 340,00 bij overnachting op een eenpersoons kamer.

Begin september wordt de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd.
Inlichtingen:
Ank van der Heiden, telefoon: 030 263 5555 of e-mail: *nwd@fi.uu.nl*

Jaarvergadering/ Studiedag 2003

[Marianne Lambriex, Heleen Verhage, Chris Zaal]

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2003 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 15 november 2003.**

Dit jaar wordt de studiedag mede georganiseerd door het samenwerkingsverband van de projectgroep **WisKids.**

Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur
Plaats: Cals College, Nieuwegein

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter, Marian Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2002 en jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie 2004-2005 en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing
- Bestuursoverdracht

Studiedag met als thema:

WisKids geeft wiskunde kleur

Vervolg huishoudelijk gedeelte

- Rondvraag en sluiting

WisKids geeft wiskunde kleur

Beste WisFaq,

1/3 + 2/3 is 1. Dat zal iedereen met mij eens zijn, maar als 1/3 = 0,3333333... en je doet dat keer 3, dan zou je dus 3/3 hebben. De uitkomst van 0,3333333...·3 is 0,9999999... Staat 0,9999999... dan gelijk aan 1? Of is 1/3 geen 0,3333333...

Een mbo-leerling, 13-5-2003

Leerlingen leren op school schoolse wiskunde: haakjes wegwerken, kwadratische vergelijkingen oplossen, kansen berekenen, functies differentiëren en integreren. Waarom? Omdat leerlingen het later nodig hebben; om leerlingen wiskundige geletterdheid bij te brengen. Voor veel leerlingen is wiskunde daarom precies dat: haakjes wegwerken, kwadratische vergelijkingen oplossen, enz.

Omdat wiskunde zoveel meer is, zijn er in Nederland tal van populariserende activiteiten, die ieder op zich proberen wiskunde meer kleur te geven. Pythagoras, Vierkant voor Wiskunde, de Nederlandse Wiskunde Olympiade, de Wiskunde A-lympiade en B-dag. Sinds een paar jaar werken de organiserende instanties samen in WisKids. WisKids is dus een samenwerkingsverband dat deze activiteiten probeert uit te bouwen tot een veelkleurig palet van niet-schoolse, populariserende activiteiten, waaronder Ratio, de WisFaq en de Wiskunde Scholen Prijs.

Het thematische deel van de studiedag van dit jaar wordt ingekleurd door WisKids. Met onder andere: de leukste vragen uit de WisFaq, een lezing over de veelzijdigheid van veelvlakken, de winnende inzendingen van de Wiskunde Scholen Prijs, trainen voor de Wiskunde Olympiade, spelletjes uit de Kangoeroewedstrijd, het beroepsperspectief van wiskundigen, verrijking met Vierkant voor Wiskunde en ervaringen met het Nijmeegse Ratio-project.

Vandaar het thema van de studiedag, in de hoop dat we wat kunnen bieden dat voor u kleur aan uw lessen kan geven. We denken verder ook aan subthema's als:

- leerstofvervangende PO's en werkstukken;
- inzet van ICT;
- winst door samenwerkingen van docenten in netwerken;
- ideeën voor de opbouw van een les of een serie lessen;
- actualiteit.

U ziet, er is voor een ieder wel iets interessants te vinden en hoe het een en ander vorm gegeven wordt, laten we u in de volgende Euclides weten.

Dus reserveer in uw agenda:
zaterdag 15 november, NVvW-dag!

In een volgend nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u exact kunt verwachten op 15 november 2003.

Tot slot

Voor meer informatie kan men zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

[Frits Göbel]

Puzzel 8 - Twaalf verdeelpuzzels

Een vorige aflevering van deze rubriek was getiteld *Twee verdeelpuzzels* (zie Euclides 78-2, het oktobernummer). Met de zomervakantie voor de deur komt u er niet zo gemakkelijk vanaf!

Het betreft een 12-voudige opgave met pentomino's. Voor degenen die deze puzzelstukjes niet kennen: het zijn de vormen die je krijgt door vijf eenheidsvierkanten aan elkaar te leggen, zijde aan zijde. Er zijn twaalf mogelijkheden. De term 'pentomino' is overigens een door S.W. Golomb gedeponeerd handelsmerk.

In figuur 1 zijn de twaalf pentomino's in een doosje van 4 bij 15 gelegd. Ze worden gewoonlijk door letters aangeduid. Linksboven zien we de P, dan van links naar rechts V, T, Z, Y, L, W, N, F, I, X, U. Bij het puzzelen mogen de stukjes worden omgedraaid; de P kent dus 8 standen.

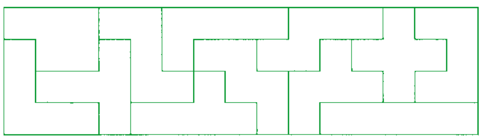
1. Ieder doosje moet precies twee soorten pentomino's bevatten (maar het mag wel steeds een ander tweetal zijn).
2. Probeer het aantal gebruikte P's zo laag mogelijk te houden.

In figuur 2 ziet u drie voorbeelden:
- het F-doosje gevuld met 5 P's en 4 V's,
- het V-doosje met 2 V's en 7 P's, en
- het I-doosje met 4 P's en 5 I's.
U begrijpt dat deze voorbeelden niet optimaal zijn, in die zin dat het aantal P's nog wel wat kleiner kan.

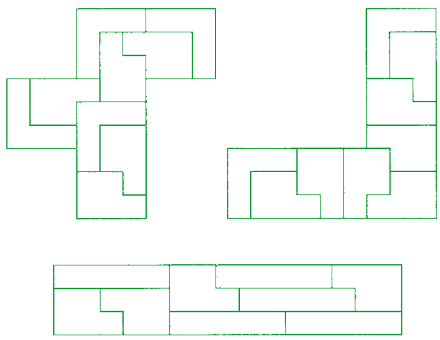
Om aan de slag te gaan is het niet nodig om over grote aantallen pentomino's te beschikken; het handigst is het om de 45-omino's met inkt op ruitjespapier te tekenen, en verder met potlood (en gum!) te werken.

Uw score is het totale aantal gebruikte pentomino's dat niet een P is, ofwel 108 min het aantal P's. Voor de ladder wordt deze score omgezet in een geheel getal tussen 0 en 20.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



De klassieke pentomino-puzzel is: Maak een rechthoek van 6 bij 10.
Deze puzzel heeft 2339 oplossingen, maar de argeloze puzzelaar die probeert er één te vinden, heeft in het algemeen moeite dit te geloven.

Voor onze opgave vergroten we alle pentomino's met een factor 3. Dit resulteert in twaalf '45-omino's' en dat zijn de twaalf doosjes die u moet vullen met (ieder negen) pentomino's. De spelregels zijn:

Veel plezier!
Oplossingen kunt u mailen naar a.gobel@wxs.nl of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor goede oplossingen.
De deadline is deze keer 20 augustus 2003.

Oplossing van 'Paard zonder grenzen'

De antwoorden op de opgaven 1, 2 en 3 zijn resp. 13, 54 en 260. De zeven inzenders bepaalden deze waarden met de hand, met een computer, of met een combinatie van beide. Alleen Wobien Doyer gebruikte een wiskundige aanpak, die voor een groot deel samenvalt met de mijne. Zoals gesuggereerd heb ik eerst voor een flink aantal punten $P(x, y)$ (met de hand) bepaald. Je ziet dan vanzelf achthoekige ringen verschijnen. Dit leidde tot een algoritme voor $P(x, y)$ en de formule voor $f(k)$. Een korte samenvatting voor $k > 4$ volgt hieronder.

Laat $A(k)$ het convexe omhulsel zijn van de acht punten $(\pm 2k, \pm k)$ en $(\pm k, \pm 2k)$. Het aantal roosterpunten in de doorsnede van $A(k)$ en het inwendige van één kwadrant is

$$2k^2 + \binom{2k}{2} - \binom{k}{2}$$

Verminder dit met de analoge uitdrukking voor $k-2$; het resultaat is $14k-15$. Dat is het aantal punten in een gebied waarin alle punten met $P(x, y) = k$ liggen. Voor de gezochte punten is de pariteit van $x+y$ gelijk aan k. Het aantal hiervan is 1 groter dan van de andere roosterpunten in dat gebied.
In het inwendige van één kwadrant liggen dus $7k-7$ punten met $P(x, y) = k$.
Dus $f(k) = 4 \cdot (7k-7) + 8 = 28k - 20$; in het bijzonder $f(10) = 260$.

De algoritme voor P werkt als volgt.
Vanwege de symmetrie mogen we voor $P(x, y)$ aannemen dat $x \geq y \geq 0$, dus $P(-17,18) = P(18,17)$.
Doe dan $x := x + 1$; $y := y - 1$ totdat $x \geq 2y$.
P verandert niet: $P(18,17) = P(24,11)$.
Rond nu 24/2 naar boven af tot een getal met dezelfde pariteit als $x + y$: 13.

Opgave 2 werd door Wobien Doyer en Lieke de Rooy op elegante wijze opgelost door de reeks van vier zetten in twee reeksen van twee zetten te splitsen. Eén van de andere inzenders gaf als antwoord 108 in plaats van 54. Enerzijds fout, anderzijds niet zomaar een getal. Wat ging hier mis?

De ladderstand is nu
L. de Rooy - 117
T. Afman, W. Doyer - 80
H. Verdonk - 71
P. Stuut - 61
D. Buijs - 59
T. Kool - 36
L. van den Brom - 32
P. Meyer - 22
S. van Dijk, H. Linders, G.W. van Gemert - 20
A. Verheul - 19
R. Griffioen - 17

(Red.: De ladderstand is vanaf heden ook te vinden op de NVvW-website: *www.nvvw.nl/eucladder.html*)

Tijd voor de prijsuitreiking.
Lieke de Rooy wint de Ladderprijs.
Gefeliciteerd!
Na zesmaal *Recreatie* waren er 39 inzendingen van 15 personen, waaronder 9 met meer dan één inzending. Afgezien van Lieke de Rooy, die niet meelootte, waren er acht inzenders met in totaal 27 inzendingen. Uit deze 27 is door loting Tamme Afman aangewezen als de gelukkige winnaar van de Prijs voor Trouwe Inzenders.
Eveneens gefeliciteerd!

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijnings-data aan van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
1	18 september 2003	5 augustus 2003
2	23 oktober 2003	9 september 2003
3	11 december 2003	28 oktober 2003
4	22 januari 2004	2 december 2003
5	26 februari 2004	13 januari 2004
6	15 april 2004	2 maart 2004
7	26 mei 2004	30 maart 2004
8	24 juni 2004	11 mei 2004

vr. 22 en za. 23 augustus 2003, Amsterdam
vr. 29 en za. 30 augustus 2003, Eindhoven
Vakantiecursus 2003
Organisatie CWI
Zie ook Euclides 78-7, pp. 326-327.

vrijdag 26 september 2003, Nijmegen
Wiskundetoernooi voor scholieren
Organisatie KUN

zaterdag 15 november 2003, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW
Zie pagina 381 in dit nummer.

zaterdag 22 november 2003
Ars et Mathesis-dag

vrijdag 28 november 2003
Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag
Organisatie FI

vr. 6 en za. 7 februari 2004, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FI
Zie pagina 380 in dit nummer.

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Wolters Noordhoff

'Wilt u meewerken aan hoogwaardige leermiddelen voor het vak wiskunde?'

Auteur Wiskunde m/v

Wolters-Noordhoff BV ontwikkelt uitgaven voor het onderwijs. Het is een inspirerend en boeiend bedrijf met een rijke historie en een open oog voor de toekomst. Creatief ondernemerschap en constructief teamwork bepalen het werkklimaat.

Er werken circa 500 mensen bij Wolters-Noordhoff. Het bedrijf is gevestigd in Groningen en Houten en bestaat uit een aantal units en een relatief kleine staf. De business units houden zich bezig met de ontwikkeling en de marketing van producten. Zij worden daarbij ondersteund door de service units.

Wolters-Noordhoff is onderdeel van Wolters Kluwer. Wolters Kluwer richt haar activiteiten op het uitgeven van informatie voor de overheid, bedrijven, instellingen, scholen en individuele beroepsbeoefenaren in een groot aantal vakgebieden. In Nederland werken circa 4000 personeelsleden voor de verschillende bedrijven en werkmaatschappijen.

Wolters-Noordhoff heeft een grote traditie in het ontwikkelen van leermiddelen voor het wiskunde onderwijs. De methoden *Moderne wiskunde* en *Netwerk* omvatten een rijk assortiment van leermiddelen bestaande uit leer- , werk- en antwoordenboeken, proefwerkbundels en ICT. Voor het ontwikkelen van de nieuwe edities van zowel *Moderne wiskunde* en *Netwerk* is Wolters-Noordhoff op zoek naar auteurs.

omschrijving Als auteur ontwikkelt u kwalitatief hoogwaardige leermiddelen voor het vak wiskunde. In samenwerking met andere auteurs wordt er meegewerkt aan de vernieuwing van de betreffende methode. Deze vernieuwing bestaat uit de herziening van de bestaande materiaal en het ontwikkelen van educatieve software.

profiel U bent werkzaam (geweest) in het Voortgezet Onderwijs in het vak wiskunde.
U heeft ervaring met het ontwikkelen van leermiddelen en u bent bereid zich hierin verder te specialiseren.
U kunt op basis van een concept leermiddelen ontwikkelen en bent in staat om commentaren van collega-auteurs te verwerken. Ook kunt u op gedetailleerd niveau commentaar leveren op het werk van andere auteurs. U bent bereid om maandelijks te overleggen met collega-auteurs op een centrale plaats in het land.

aanbod Wij bieden u de mogelijkheid om in een inspirerend team van auteurs te werken aan toekomstgerichte materialen voor het onderwijs.
We bieden u een auteurscursus en begeleiding. De vergoeding vindt plaats op royalty-basis.

aanmelding U kunt uw interesse kenbaar maken door een cv met beknopte motivatie te sturen aan Wolters-Noordhoff BV, t.a.v. Dieuwke Rosema, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mail d.rosema@wolters.nl

Wolters-Noordhoff ... ervaring met toekomst